(Differentialekvationer I, ht07: F9, fr 28 september)

Diracs deltafunktion, $\boldsymbol{\delta(t)}$

δ–"funktionen" beskriver fenomen som är koncentrerade i tid eller rum, som kraftens beroende av tiden vid en ideal stöt eller densiteten i en punktmassa.

Egenskaper (intuitivt): $\begin{cases} \delta(t-t_0)=0, \quad t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \end{cases}$

Definition: För alla "snälla" $f(t)$

(t.ex. oändligt deriverbara och så att alla derivator $\to 0$ snabbare än $|t|^{-N}$, varje N, då $t \to \pm\infty$),

$$\boldsymbol{\delta(f)} \left(= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt \right) = \boldsymbol{f(t_0)}$$

Då gäller för $t_0 \geq 0$:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0},} \quad \text{spec. } \boldsymbol{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1}$$

och

$$\boldsymbol{\delta * f = f,} \qquad \boldsymbol{(\mathcal{U}' = \delta\,)}$$

Begynnelsevärdesproblemet för en linjär ODE med konstanta koefficienter,

$$\begin{cases} P(D)y = g(t), \quad P(x) \text{ polynom av grad } n \\ y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0) \text{ alla } 0 \end{cases}$$

har lösningen

$$\boldsymbol{y(t) = (g * w)(t) = \int_0^t g(u)w(t-u)\,du, \quad W(s) = \frac{1}{P(s)},}$$

där $\boldsymbol{w(t)}$ är **impulssvaret**, som uppfyller problemet med $g = \delta$.

Sammanställning om laplacetransformer

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$
$a\,f(t) + b\,g(t)$	$a\,F(s) + b\,G(s)$, a, b konstanter
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$, a godtyckligt
$f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$, $a \geq 0$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$, $n = 0, 1, \ldots$
$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(t)$, $f(t+T) = f(t)$, alla $t \geq 0$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}, $t_0 \geq 0$