Fler egenskaper hos laplacetransformer

Minns laplacetransformen av en funktion $f(t)$, definierad för $t \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(= F(s) = \tilde{f}(s)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

(om integralen är konvergent).

Translationer

För godtyckligt a gäller

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) = \mathcal{L}\{f(t)\}\big|_{s \to s-a}}$$

För $\boldsymbol{a \geq 0}$ gäller

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\},}$$

där $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ är **Heavisides stegfunktion**.

Med den kan man uttrycka funktioner som är olika definierade i olika intervall.

Derivator av $F(s)$

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s), \text{ så}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)}, \ n = 0, 1, \ldots$$

Faltningen (eng. convolution) av f och g:

$$\boldsymbol{(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\, du}$$

För alla f, g, h gäller $f * g = g * f$ och $(f * g) * h = f * (g * h)$ och

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}}$$

speciellt ($g(t) \equiv 1$)

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du\right\} = \frac{F(s)}{s} = \tfrac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

Volterras integralekvation:

Finn, då $g(t), h(t)$ är kända, $f(t)$ så att

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(u)h(t-u)\, du, \quad \text{dvs } f = g + f * h.$$

$\mathcal{L}$-transform ger

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - H(s)}.$$

Periodiska funktioner

Om $f(t+T) = f(t)$, för något $T > 0$ och alla $t \geq 0$, gäller

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}$$