

Om laplacetransformer

Definition av laplacetransformen av en funktion $f(t)$, definierad för $t \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} (= F(s) = \tilde{f}(s)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

(om integralen är konvergent). Den är alltså en ny funktion, av variabeln s .

$F(s)$ är definierad för alla s med $(\operatorname{Re})s > c$ om

$f(t)$ är **styckvis kontinuerlig** och av **exponentiell typ c** .

Då är $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$

(styckvis kontinuerlig: för alla $t \geq 0$ finns vänstergränsvärdet $f_-(t)$ ($t \neq 0$) och högergränsvärdet $f_+(t)$ och i varje begränsat intervall är $f_-(t) = f_+(t)$ (dvs f kontinuerlig) utom för ett ändligt antal t ,

exponentiell typ c : det finns tal K, T så att $|f(t)| < Ke^{ct}$ för alla $t > T$)

$\mathcal{L}$ är **linjär**, dvs för alla $a, b, f(t), g(t)$ så att $\mathcal{L}\{f(t)\}, \mathcal{L}\{g(t)\}$ existerar:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Viktiga ex.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$

Om $f(t)$ är kontinuerlig och av exponentiell typ

och $f'(t)$ är styckvis (definierad och) kontinuerlig:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Så om $f(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ är kontinuerliga och av exponentiell typ

och $f^{(n)}(t)$ är styckvis (definierad och) kontinuerlig:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Metod ("transformmetoden") att lösa **begynnelsevärdesproblem** för linjära ODE med konstanta koefficienter:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} P(D)y = g(t) \\ y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{array} \right. & \xrightarrow{\mathcal{L}} & P(s)Y(s) - Q(s) = G(s) \\ & & \downarrow \\ \text{Lösningen } y(t) = \dots & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)} \end{array}$$

Där P är ett polynom av grad n (karaktäristiska polynomet för ODE:n) och Q ett polynom av grad $\leq n-1$ som bestäms av (P och) begynnelsevillkoren. $\mathcal{L}^{-1}$ betecknar den **inversa laplacetransformen**. Vi bestämmer den oftast genom att forma om s -funktionen (t.ex. med **partialbråksuppdelning**) tills vi känner igen den som en (linjäerkombination av) transform(er).