(Differentialekvationer I, ht07: F6, må 17 september)

Variation av parametrar

för att lösa **inhomogena** linjära ODE, ZC4.6

Givet en inhomogen linjär ODE, nu på formen

$$\boldsymbol{L(y) = y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_0(x)y = f(x),}$$

där $P_{n-1}, \ldots, P_0(x), f(x)$ är kontinuerliga i intervallet I
(i den tidigare formen har ekvationen alltså dividerats med $a_n(x)$).

Låt $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ vara en **fundamentalmängd lösningar** till den **homogena** ekvationen $\boldsymbol{L(y) = 0}$, så wronskideterminanten

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \textbf{alla} \ \ x \in I.$$

För varje n ggr deriverbar funktion $y(x)$ finns entydiga $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ så att

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = u_1(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \cdots + u_n(x) \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

$u_1(x), \ldots, u_n(x)$ är deriverbara och $L(y) = f(x)$ om och endast om

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}},$$

ett **linjärt ekvationssystem** med **entydigt bestämda** $u_1'(x), \ldots, u_n'(x)$. Integration av dem ger $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ och lösningen till $L(y) = f(x)$:

$$\boldsymbol{y(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)}.$$

Cramers regel (ett klassiskt resultat i linjär algebra)
Om A är en kvadratisk matris med $\det A \neq 0$, ges lösningen till det linjära ekvationssystemet $\boldsymbol{Ax = b}$ av

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

där A_i är A med **den $\boldsymbol{i}$:e kolonnen utbytt mot högerledskolonnen $\boldsymbol{b}$**.

[Då detta tillämpas på ekvationssystemet för u_i':en, de integreras och resultaten sätts in i uttrycket för $y(x)$ fås (med lite linjär algebra)

$$\boldsymbol{y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t) f(t)\, dt + y_h(x)}$$

där

$$G(x,t) = \frac{1}{W(y_1, \ldots, y_n)(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}$$]