Allmänt om linjära ODE, ZC4.1

En linjär ODE kan skrivas $\boldsymbol{L(y) = 0}$ (homogen ekvation) eller $\boldsymbol{L(y) = g(x)}$ (inhomogen), där **differentialoperatorn** L ges av

$$L = a_n(x)D^n + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).$$

Vi antar här att $a_n(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), g(x)$ är **definierade och kontinuerliga** i ett **intervall** $\boldsymbol{I}$ och $\boldsymbol{a_n(x) \neq 0}$ för alla $x \in I$.

L är en **linjär** operator, dvs $L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2)$ för alla konstanter $c_{1,2}$ och alla (n ggr deriverbara) funktioner $f_{1,2}$. Det ger

Superpositionsprincipen (för linjära, homogena ODE):
Om $y_1, y_2, \ldots, y_k$ uppfyller $L(y) = 0$, så gör $y = c_1 y_1 + \cdots + c_k y_k$ också det.

Sats: (Global och entydig lösbarhet för linjära ODE)
Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} L(y) = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

har för $x_0 \in I$ och $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) en **entydig lösning** $y(x)$ i **hela intervallet** I.

Wronskideterminanten av funktionerna $f_1, \ldots, f_n$:

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Det gäller att $f_1, \ldots, f_n$ linjärt beroende $\Rightarrow$ $W(f_1, \ldots, f_n)(x) = 0$, alla $x \in I$

Sats: Om $y_1, \ldots, y_n$ är lösningar till $L(y) = 0$ i I gäller
$y_1, \ldots, y_n$ är **linjärt oberoende** $\Leftrightarrow$ $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$, **alla** $x \in I$
$y_1, \ldots, y_n$ är **linjärt beroende** $\Leftrightarrow$ $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$, **alla** $x \in I$

En **fundamentalmängd lösningar** till $L(y) = 0$ är en mängd av n stycken linjärt oberoende lösningar.

Sats: $L(y) = 0$ har en fundamentalmängd lösningar.

Sats: Om $\{y_1, \ldots, y_n\}$ är en fundamentalmängd lösningar till $L(y) = 0$, kan varje lösning skrivas $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ (allmänna lösningen).
Fundamentalmängden är alltså en **bas** för lösningarna.

Om inhomogena ekvationer

Sats: Allmänna lösningen till $L(y) = g$ är $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$, där
y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $L(y) = 0$ och
y_p är **en** lösning till $L(y) = g$ (en "partikulärlösning").

Sats: Om $L(y_{p_i}) = g_i$ och $y_p = c_1 y_{p_1} + \cdots + c_k y_{p_k}$ så är $L(y_p) = c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k$.

Så de flesta egenskaperna för lösningarna till linjära ODE med konstanta koefficienter (från Ameliakursen) är typiska. Om koefficienterna inte är konstanta kan man dock **inte** finna alla lösningar till en homogen ekvation genom att lösa en karakteristisk ekvation.