(Differentialekvationer I, ht07: F3, må 10 september)

Modellering med första ordningens ODE

Nedanstående togs upp på föreläsningen, men även övriga exempel i boken ingår.

Linjära modeller, ZC3.1

Radioaktivt sönderfall

$\frac{dA}{dt} = kA\,,\ A(t) = A_0 e^{kt}\,,\ k < 0.$

halveringstid $\boldsymbol{\tau}$, $A(\tau) = \frac{1}{2}A(0)$

Elektriska kretsar

spänningen över ett motstånd (en resistor) med resistans R

är $\boldsymbol{Ri}$, där i är strömmen

spänningen över en spole (en induktor) med induktans L

är $\boldsymbol{L\frac{di}{dt}}$

spänningen över en kondensator med kapacitans C

är $\boldsymbol{\frac{1}{C}q}$, där q är laddningen; strömmen $i = \frac{dq}{dt}$

Några icke-linjära modeller, ZC3.2

Populationsutveckling

$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)\,,\ a, b > 0$, kallas **logistikekvationen**.

Den löses med variabelseparation eller $u = \frac{1}{P}$ (Bernoulli).

Varianter

$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln P)\,, \quad \frac{dP}{dt} = P(a - bP) \pm h(t)$

Smittspridning

$\frac{dx}{dt} = kx(n - x)$, åter **logistikekvationen**

(x antalet smittade, n totala antalet individer, k en konstant)

Några modeller med system av ODE, ZC3.3

Radioaktivt sönderfall i flera steg

Om ämne X sönderfaller till ämne Y, som sönderfaller till ämne Z osv fås för mängderna:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda_2 y - \lambda_3 z \\ & \ldots\ldots \end{cases}$$

Populationsutveckling, flera arter

1. X rovdjur, Y bytesdjur (Lotka-Volterras ekvationer)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x(-a + by) \\ \frac{dy}{dt} &= y(d - cx) \end{cases} \qquad a, b, c, d > 0$$

Har **periodiska lösningar**, se fig. sid. 116 i boken

2. X och Y konkurrerande arter

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x(a_1 - b_1 x - c_1 y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(a_2 - b_2 y - c_2 x) \end{cases} \qquad a_1, \ldots, c_2 > 0$$

Konstanterna avgör, **samexistens** eller **en art dör ut**

Ovanstående ekvationer och system är alla **autonoma**.