(Differentialekvationer I, ht07: F2, to 6 september)

Om första ordningens ODE,

$$\boldsymbol{y' = f(x, y)} \qquad \text{(normalform)}$$

Kvalitativa metoder

Riktningsfält
små "tangentbitar", med lutning $f(x, y)$, ritas i punkter i xy–planet.
(Se figurer i boken, sid. 41,46,47)
Man kan "se" lösningarnas allmänna beteende.

Fasporträtt för **autonoma** ekvationer, $y' = f(y)$
Konstanta lösningar till DE ges av **kritiska punkter**,
lösningar till $f(y) = 0$.
f:s tecken däremellan visar hur y ändras då x växer.
(Se figur i boken, sid. 43)
En kritisk punkt kan vara **asymptotiskt stabil** (en attraktor), **instabil** (en repellor) eller **semi–stabil**

Separabla ekvationer

Om ekvationen har formen $y' = g(x)h(y) = \frac{g(x)}{p(y)}$ kan den skrivas

$$p(y)y' = g(x) \quad \text{(eller } p(y)dy = g(x)dx)$$

$\int \ldots dx$ (eller $\int$) ger

$$P(y) = G(x) + C, \quad C \text{ en godtycklig konstant,}$$

lösningen på **implicit form**. Ibland kan y "lösas ut" som funktion av x (eller x som funktion av y).

Linjära ekvationer

Om ekvationen har formen $a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$, dividera med $a_1(x)$:

$$y' + P(x)y = f(x) \qquad \text{(standardform).}$$

Multipliceras med den **integrerande faktorn $\boldsymbol{e^{\int P(x)\,dx}}$** så blir ekvationen

$$(e^{\int P(x)\,dx}y)' = e^{\int P(x)\,dx}f(x).$$

Den ger lösningen **explicit** (om man kan lösa integralerna).

Substitution

Variabelbyte (med kedjeregeln osv) kan förenkla. Viktiga fall:

"Homogena ekvationer"
Om ekvationen är $y' = f(x, y)$, där $f(tx, ty) = f(x, y)$ för alla t,
tag en ny beroende variabel u enligt $y(x) = xu(x)$ (eller v enligt $x(y) = yv(y)$).
Det ger en separabel ekvation för u (eller v).

Bernoulli–ekvationer
Ekvationer av formen $y' + P(x)y = f(x)y^n$, $n \neq 0, 1$, ger med substitutionen $u = y^{1-n}$ en linjär ekvation för u.

En till
Ekvationer av formen $y' = f(Ax + By + C)$, A, B, C konstanter, $B \neq 0$, ger med $u = Ax + By + C$ en autonom (så separabel) ekvation för u.