

Lösningar ks4 i SF1633 Differentialekvationer I, 1 nov 2007

1) (3p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

där $x = x(t)$ och $y = y(t)$.

Lösning: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ger karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \iff \lambda = \pm i.$$

$$\lambda = i \implies C - \lambda I = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{med egenvektorn} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså den komplexa lösningen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

varur

Svar: Den allmänna lösningen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad A, B \text{ godtyckliga konstanter.}$$

ALTERNATIVT:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -x \iff \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0 \implies$$

$$x = A \cos t + B \sin t \quad \text{och} \quad y = \frac{dx}{dt} = A(-\sin t) + B \cos t.$$

2) (3p) Låt $a \in \mathbb{R}$. Det icke-linjära systemet

$$(*) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + ay(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\}$$

har uppenbarligen origo $(0, 0)$ som en kritisk punkt. Linjarisera $(*)$ i origo och bestäm vilken typ av kritisk punkt som det linjariserade systemet har där.

Lösning: Linjariseringen i origo ges av

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Antingen, med bokens $\tau\Delta$ -metod:

$$\tau = 0 + 0 = 0, \quad \Delta = 1 \implies \text{origo är ett centrum,}$$

eller, med hjälp av egenvärdena, vilka som i uppgift 1) fås till $\pm i$ (dvs rent imaginära, $\neq 0$), ses detsamma.

Svar: Origo är ett centrum för det linjariserade systemet.

3) (3p) För att förstå hur lösningarna till (*) ovan uppför sig nära origo börjar vi med att införa

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Visa att

$$2r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) \quad \text{är lika med} \quad 2ar^4,$$

och slut härur att

$$\frac{dr}{dt} = ar^3 \quad \text{om} \quad r \neq 0.$$

Använd lösningen av den senare differentialekvationen för att förstå vilken typ av kritisk punkt som origo är då $a > 0$ respektive $a < 0$.

Lösning:

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2a(x^2 + y^2)^2 = 2ar^4 \iff \frac{dr}{dt} = ar^3 \text{ om } r \neq 0.$$

Vi får alltså en separabel differentialekvation som löses på vanligt sätt då $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = ar^3 &\iff \int r^{-3} dr = a \int dt \iff -\frac{1}{2}r^{-2} = at - \frac{1}{2}C \\ &\iff r^{-2} = C - 2at = r^{-2}(0) - 2at \iff r = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2(0)} - 2at}}. \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} \mathbf{a > 0:} \quad r &\rightarrow \infty \text{ då } t \nearrow \frac{1}{2ar^2(0)} \implies \textit{instabilitet}, \\ \mathbf{a < 0:} \quad r &\rightarrow 0 \text{ då } t \rightarrow \infty \implies \textit{asymptotisk stabilitet}. \end{aligned}$$

Lösningar ks5 i SF1633 Differentialekvationer I, 1 nov 2007

1) (Varje delfråga ger $\pm\frac{1}{2}$ p eller 0p, summan rundas uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är ortogonala på intervallet $[-\pi, \pi]$, måste $f(x) + g(x)$ och $f(x) - g(x)$ också vara det. [Nej, bara om $\ f\ = \ g\ $.]		×
b) Cosinusserien för funktionen $f(x) = 1 - \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi$, konvergerar för $x = \frac{5\pi}{4}$ mot 2. [Ja, mot en 2π -periodisk jämn funktion, så för $\frac{5\pi}{4}$ som för $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$ som för $-(-\frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$, mot $f(\frac{3\pi}{4}) = 2$]	×	
c) Fourierserien för den periodiska funktionen f kan inte konvergera i en punkt där både f och f' är diskontinuerliga. [Jodå, se Thm 11.1, s.437 i ZC.]		×
d) Produkten av en jämn och en udda funktion är alltid udda. [Javisst, se Thm 11.2, s.441 i ZC.]	×	
e) Värmeledningsekvationen (i en rumsdimension) är $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$, k en konstant. [Ja, så är det.]	×	
f) Funktionen $u(x, t) = x^2 + a^2 t^2$ är en lösning till vågekvationen (med våghastighet a). [Ja, båda leden blir 2 (eller $2a^2$).]	×	

2a) (2p) Finn fourierserien för den 2π -periodiska funktion f som uppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

b) (1p) Vad konvergerar serien mot då $x = 3\pi$?

Lösning: a) Fourierserien för $f(x)$ på $[-\pi, \pi]$ ges av

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

med $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

I vårt fall:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 1 \, dx + \int_0^{\pi} 2 \, dx \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 2\pi) = 3$$

$f(x) - \frac{a_0}{2} = f(x) - \frac{3}{2}$ är en udda funktion, så $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 1 \cdot \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} 2 \cdot \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[-2\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \right) =$$

$$\frac{1}{\pi n} (-\cos 0 + \cos(-n\pi) - 2\cos n\pi + 2\cos 0) = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & n \text{ udda} \\ 0 & n \text{ jämnt} \end{cases}.$$

b) Då $x = 3\pi$ blir alla sin-termer 0, så serien konvergerar mot $\frac{3}{2}$.

Svar: a) Fourierserien är $\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin nx$.

b) För $x = 3\pi$ konvergerar den mot $\frac{3}{2}$.

3) (3p) En sträng har sina ändar fästa i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$.
Vid $t = 0$ släpps den från läget $u(x, 0) = \sin x + \sin 2x$ med hastigheten 0.
Bestäm strängens läge $u(x, t)$ för $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$, då läget förutsätts uppfylla vågekvationen (med våghastighet a).

Lösning: (Mer detaljerad än vad som krävs av de skrivande)

Problemet blir

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0 < x < \pi, t > 0, & \text{PDE (vågekvationen)} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, & \text{RV (ändarna sitter fast)} \\ u(x, 0) = \sin x + \sin 2x, & 0 < x < \pi & \text{BV (läget vid } t = 0) \\ u'_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi & \text{BV (strängen släpps med hastighet 0)} \end{cases}$$

Variabelseparation, vi söker lösningar av form $u(x, t) = X(x)T(t)$ till PDE+RV:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\lambda, \text{ konstant} \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

ger som vanligt icke-triviala lösningar bara då $\lambda = \lambda_n = n^2$,

$X_n(x) = \text{konst.} \cdot \sin nx$, $T_n(t) = a_n \cos nat + b_n \sin nat$, $n = 1, 2, \dots$,

så $u_n(x, t) = \sin nx(a_n \cos nat + b_n \sin nat)$

Superposition ger lösningen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx(a_n \cos nat + b_n \sin nat),$$

där a_n, b_n bestäms av BV:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \text{ och } u'_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} nab_n \sin nx.$$

I vårt fall är $u(x, 0) = \sin x + \sin 2x$, så $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = 0$, $n = 3, 4, \dots$

och $u'_t(x, 0) = 0$, så alla $b_n = 0$.

Insättning ger

Svar: Strängens läge för $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$:

$$u(x, t) = \sin x \cos at + \sin 2x \cos 2at$$