

**KTH Matematik**  
Olle Stormark, Bengt Ek

| $\Sigma$ p | G/U | bonus |
|------------|-----|-------|
|            |     |       |

| Efternamn | förnamn | pnr | program |
|-----------|---------|-----|---------|
|           |         |     |         |

**Kontrollskrivning 4, torsdag 1 november 2007 klockan 8.00–10.00,  
i SF1633 Differentialekvationer I för BD2, M2, P2 (m.fl.)**

Inga hjälpmedel tillåtna.

5–9p på skrivningen ger 2 poäng till tentan, 3–4p ger 1 poäng.

**Väl motiverade lösningar krävs för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

**Lycka till!**

*Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan efter skrivningen.*

| Namn | poäng<br>uppg.1 |
|------|-----------------|
|      |                 |

1) (3p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

där  $x = x(t)$  och  $y = y(t)$ .

---

**Lösning:**

| Namn | poäng<br>uppg.2 |
|------|-----------------|
|      |                 |

**2)** (3p) Låt  $a \in \mathbb{R}$ . Det icke-linjära systemet

$$(*) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + ay(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\}$$

har uppenbarligen origo  $(0, 0)$  som en kritisk punkt. Linjarisera  $(*)$  i origo och bestäm vilken typ av kritisk punkt som det linjariserade systemet har där.

---

**Lösning:**

| Namn | poäng<br>uppg.3 |
|------|-----------------|
|      |                 |

**3)** (3p) För att förstå hur lösningarna till (\*) ovan uppför sig nära origo börjar vi med att införa

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Visa att

$$2r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) \quad \text{är lika med} \quad 2ar^4,$$

och slut härur att

$$\frac{dr}{dt} = ar^3 \quad \text{om} \quad r \neq 0.$$

Använd lösningen av den senare differentialekvationen för att förstå vilken typ av kritisk punkt som origo är då  $a > 0$  respektive  $a < 0$ .

**Lösning:**

**KTH Matematik**  
 Olle Stormark, Bengt Ek

| $\Sigma$ p | G/U | bonus |
|------------|-----|-------|
|            |     |       |

| Efternamn | förnamn | pnr | program |
|-----------|---------|-----|---------|
|           |         |     |         |

**Kontrollskrivning 5, torsdag 1 november 2007 klockan 8.00–10.00,  
 i SF1633 Differentialekvationer I för BD2, M2, P2 (m.fl.)**

Inga hjälpmedel tillåtna.

5–9p på skrivningen ger 2 poäng till tentan, 3–4p ger 1 poäng.

**Till uppgifterna 2 och 3 krävs väl motiverade lösningar för full poäng.**

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

**Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!**

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p.

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

**Kryssa för** om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

|                                                                                                                                                       | sant | falskt |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|--------|
| a) Om funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är ortogonala på intervallet $[-\pi, \pi]$ , måste $f(x) + g(x)$ och $f(x) - g(x)$ också vara det.               |      |        |
| b) Cosinusserien för funktionen $f(x) = 1 - \sin 2x$ , $0 \leq x \leq \pi$ , konvergerar för $x = \frac{5\pi}{4}$ mot 2.                              |      |        |
| c) Fourierserien för den periodiska funktionen $f$ kan inte konvergera i en punkt där både $f$ och $f'$ är diskontinuerliga.                          |      |        |
| d) Produkten av en jämn och en udda funktion är alltid udda.                                                                                          |      |        |
| e) Värmeledningsekvationen (i en rumsdimension) är $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$ , $k$ en konstant. |      |        |
| f) Funktionen $u(x, t) = x^2 + a^2 t^2$ är en lösning till vågekvationen (med våghastighet $a$ ).                                                     |      |        |

| poäng<br>uppg.1 |
|-----------------|
|                 |

| Namn | poäng<br>uppg.2 |
|------|-----------------|
|      |                 |

**2a)** (2p) Finn fouriersserien för den  $2\pi$ -periodiska funktion  $f$  som uppfyller

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

**b)** (1p) Vad konvergerar serien mot då  $x = 3\pi$ ?

---

**Lösning:**

| Namn | poäng<br>uppg.3 |
|------|-----------------|
|      |                 |

**3)** (3p) En sträng har sina ändar fästa i punkterna  $x = 0$  och  $x = \pi$ .  
Vid  $t = 0$  släpps den från läget  $u(x, 0) = \sin x + \sin 2x$  med hastigheten 0.  
Bestäm strängens läge  $u(x, t)$  för  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , då läget förutsätts uppfylla vågekvationen (med våghastighet  $a$ ).

---

**Lösning:**

*Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan efter skrivningen.*