Lösningar ks4 i 5B1206 Differentialekvationer I, 31 okt 2006

1) (Varje delfråga ger $\pm\frac{1}{2}$p eller 0p, summan rundas uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Det linjära systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ har säkert en fundamentalmängd lösningar på hela intervallet I, då $\mathbf{A}(t)$ är $n \times n$ och kontinuerlig för $t \in I$ och $\mathbf{x}(t)$ $n \times 1$. Theorem 8.4, sid. 334 i ZC.	×	
b)	Om den konstanta, reella $2 \times 2-$matrisen $\mathbf{A}$ har två olika, reella egenvärden, båda $\neq 0$, har systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ säkert en sadelpunkt i origo. Det kan vara en nod också, ZC sid.403f.		×
c)	Om $\mathbf{\Phi}(t)$ är en fundamentalmatris för systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ på intervallet I, kan determinanten $\det \mathbf{\Phi}(t) = 0$ för alla $t \in I$. ZC sid.356: $\mathbf{\Phi}(t)$ är icke–singulär.		×
d)	För att systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ skall vara autonomt, krävs både att $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$, oberoende av t, och att $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ för alla t. $\mathbf{f}(t)$ kan vara $\neq \mathbf{0}$, t–oberoende.		×
e)	Om jacobimatrisen $\mathbf{A} = \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$ har två icke–reella egenvärden, måste den kritiska punkten $\mathbf{x}_0$ till det plana autonoma systemet $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ vara instabil. Om egenvärdena har negativ realdel, är $\mathbf{x}_0$ stabil.		×
f)	En n:e ordningens ODE av formen $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \ldots, y', y)$ kan alltid formuleras som ett första ordningens autonomt system. Som längst ner sid.395 i ZC.	×	

---

2) (3p) Finn den allmänna lösningen till systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Lösning: Vi söker först egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Karakteristisk ekvation: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 =$

$= (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, så $\lambda_{1,2} = 3, -1$. Egenvektorn $\mathbf{k}$ ges av $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{0}$:

$\lambda_1 = 3$, $\left(\begin{array}{cc|c} -2-3 & 1 & 0 \\ -5 & 4-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, välj $\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -1$, $\left(\begin{array}{cc|c} -2+1 & 1 & 0 \\ -5 & 4+1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, tag $\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{k}_2 e^{\lambda_2 t}$, så

Svar: Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, $c_{1,2}$ godtyckliga konstanter.

3) (3p) Finn alla kritiska punkter till det plana autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = (3+x)(y-x) \\ y' = (3-x)(y+x+2) \end{cases}$$

och bestäm typ och stabilitet för en av dem (välj själv).

Lösning: De kritiska punkterna ges av systemet $\begin{cases} (3+x)(y-x) & = 0 \\ (3-x)(y+x+2) & = 0 \end{cases}$
Den första ekvationen ger $x = -3$ eller $y = x$.
Om $x = -3$ ger den andra ekvationen att $y - 1 = 0$, dvs $y = 1$.
Om $y = x$ ger den andra ekvationen att $(3-x)(2x+2) = 0$, dvs $x = 3, -1$.
De kritiska punkterna är alltså $(-3,1), (3,3), (-1,-1)$.
För att avgöra typ och stabilitet kring dem studerar vi lineariseringarna:
Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} -3-2x+y & 3+x \\ 1-2x-y & 3-x \end{pmatrix}$.
$(-3,1)$: $\mathbf{A} = \mathbf{J}(-3,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$, egenvärden för det lineariserade systemet ges av $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-6) = 0$, så $\lambda_{1,2} = 4, 6$, så $(-3,1)$ är en instabil nod (två positiva egenvärden).
[Alternativt: Sätt in $x = -3+u, y = 1+v$ i systemet, betrakta linjära termer i u, v.]
$(3,3)$: $\mathbf{A} = \mathbf{J}(3,3) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$, egenvärden för det lineariserade systemet ges av $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6 \\ -8 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 48 = 0$, så $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{39}$, så $(3,3)$ är en asymptotiskt stabil spiralpunkt (två icke–reella egenvärden med negativ realdel).
$(-1,-1)$: $\mathbf{A} = \mathbf{J}(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, egenvärden för det lineariserade systemet ges av $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 16 = 0$, så $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{17}$, så $(-1,-1)$ är en sadelpunkt (två reella egenvärden med olika tecken), alltså instabil.

Svar: Kritiska punkter är $(-3,1), (3,3), (-1,-1)$.
$(-3,1)$ är en instabil nod.
$(3,3)$ är en asymptotiskt stabil spiralpunkt.
$(-1,-1)$ är en sadelpunkt, alltså instabil.

Lösningar ks5 i 5B1206 Differentialekvationer I, 31 okt 2006

1) (Varje delfråga ger $\pm\frac{1}{2}$p eller 0p, summan rundas uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Funktionerna $f(x) = \|x\| + x^2$ och $g(x) = \sin x^3$ är ortogonala på intervallet $[-\pi, \pi]$. $f(x)$ är jämn, $g(x)$ udda, intervallet symmetriskt.	×	
b)	Sinusserien för funktionen $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) - \|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\|$, $0 \le x \le \pi$, konvergerar för $x = -\frac{3\pi}{4}$ mot $\frac{3\pi}{4} - \sqrt{2}$. Den konvergerar mot $-f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$		×
c)	**Gibbs fenomen** innebär att om f och f' är styckvis kontinuerliga, divergerar f:s fourierserie i punkter där f är diskontinuerlig. Se ZC sid.442. Serien konvergerar.		×
d)	Värmeledningsekvationen är en hyperbolisk partiell differentialekvation. Den är parabolisk.		×
e)	”Variabelseparationsmetoden” att lösa partiella differentialekvationer innebär att man först söker en lösning som är en produkt av funktioner, vilka var och en bara beror av en av de oberoende variablerna. Så är det.	×	
f)	Laplaces ekvation kan beskriva hur temperaturen i en avsvalnande platta beror av tiden. Den beskriver stationär temperaturfördelning.		×

2a) (2p) Finn fourierserien för funktionen

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

b) (1p) Vad konvergerar serien mot då $x = 4$?

Lösning: a) Fourierserien för $f(x)$ på $[-\pi, \pi]$ ges av

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

med $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

I vårt fall:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos 0x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$

$n \ge 1$: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\sin nx}{n}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$

$= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx = 0$, ty integranden är udda, intervallet symmetriskt.

b) Serien konvergerar mot den 2π–periodiska fortsättningen av $f(x)$, så för $x = 4$ konvergerar den mot $f(4 - 2\pi) = |4 - 2\pi| = 2\pi - 4$.

Svar: a) Fourierserien är $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos nx$.

b) För $x = 4$ konvergerar den mot $2\pi - 4$.

3) (3p) En stav av längd L har vid tiden $t = 0$ temperaturen

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L}(1 - \cos\frac{\pi x}{L}).$$

Stavens ändpunkter vid $x = 0$ och $x = L$ hålls vid temperatur 0.
Bestäm $u(x,t)$ för $t > 0$, då temperaturen i staven antas uppfylla den endimensionella värmeledningsekvationen.

Lösning: Problemet blir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < L, t > 0, \qquad \text{PDE} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \qquad \text{RV} \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L}(1 - \cos\frac{\pi x}{L}), & 0 < x < L \qquad \text{BV} \end{cases}$$

Variabelseparation, vi söker lösningar av form $u(x,t) = X(x)T(t)$ till PDE+RV:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{1}{k}\frac{T'}{T} = -\lambda, \text{ konstant} \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

ger som vanligt icke–triviala lösningar bara då $\lambda = \lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2$,
$X_n(x) = \text{konst.} \cdot \sin\frac{n\pi x}{L}$, $T_n(t) = \text{konst.} \cdot e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$, $n = 1, 2, \ldots$,
så $u_n(x,t) = b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$

Superposition ger lösningen
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}$,
där b_n bestäms av $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$.
I vårt fall är $u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L}(1 - \cos\frac{\pi x}{L}) = \sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}$,
dvs $b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2}$, övriga $b_n = 0$, så

Svar: Temperaturen blir för $0 \le x \le L,\ \ t \ge 0$:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sin\frac{\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{\pi}{L})^2 t} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}\, e^{-k(\frac{2\pi}{L})^2 t}}$$