Lösningar ks1 i 5B1206 Differentialekvationer I, 26 sep 2006

1) (Varje delfråga ger $\pm\frac{1}{2}$p eller 0p, summan rundas uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Följande differentialekvation är **linjär**: $\cos x\, y'' + e^{-x}y' - (x^2+1)y = x^2$. (Def. sid. 4 i boken)	$\times$	
b)	Om $f(x,y)$ är kontinuerlig omkring (x_0, y_0) har problemet $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ säkert en entydig lösning i en omgivning till x_0. (Motex ges av $f(x,y) = \sqrt{\lvert y\rvert}, (x_0,y_0) = (0,0)$, jfr ex.4 sid. 15)		$\times$
c)	Följande differentialekvation är **separabel**: $e^x y' = \frac{x^2 y}{1+y^2}$. (Def. sid. 50 i boken)	$\times$	
d)	Följande differentialekvation är **partiell**: $\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = \tan(x^2 + yz)$. (Inga partiella derivator, def. sid. 2–3)		$\times$
e)	Varje kritisk punkt till en **autonom** ekvation $y' = f(y)$ är antingen instabil eller asymptotiskt stabil. (Kan vara "semi–stabil" också, sid. 46)		$\times$
f)	$y = 1$ är en **instabil** kritisk punkt till ekvationen $y' = (y+2)(y-1)(y-2)$. $(f(\frac{1}{2}) > 0, f(\frac{3}{2}) < 0$, "så" stabil)		$\times$

2) (3p) Lös begynnelsevärdesproblemet och ange det största intervall där lösningen är definierad

$$\begin{cases} xy' + 2y = \sin x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

Lösning: För att finna den integrerande faktorn dividerar vi ekvationen med x, koefficienten för y', och får $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.
En integrerande faktor till denna är $e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = |x|^2 = x^2$. Multipliceras ekvationen med denna faktor fås $x^2y' + 2xy = (x^2y)' = x\sin x$, så
$x^2y(x) = \int x\sin x\,dx = [\text{P.I.}] = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$,
C en godtycklig konstant.
Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$y(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} + \frac{C}{x^2}, \quad C \text{ konstant.}$$

Begynnelsevillkoret $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ger $1 = \frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2} + \frac{C}{(\frac{\pi}{2})^2}$, så $C = (\frac{\pi}{2})^2 - 1$ och **den sökta lösningen:**

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{1}{x^2}((\frac{\pi}{2})^2 - 1 + \sin x - x\cos x).}$$

Den definierar en lösning i hela intervallet $x > 0$, men inte i något större intervall. (Om $C = 0$ fås en lösning för alla x, även $x = 0$.)

3) (3p) Två bassänger innehåller saltvatten med volymerna V_1 och V_2 (liter). Till bassäng 1 förs saltvatten med flödet r_1 (l/min) och saltkoncentrationen c (kg/l).
Till bassäng 2 förs dels saltvatten från bassäng 1 med flödet r_1, dels rent vatten (dvs utan salt) med flödet r_2.
Från bassäng 2 flödar vatten med flödet $r_1 + r_2$.
Ställ upp ekvationer och villkor för att bestämma mängderna salt i bassängerna, $x_1(t)$ och $x_2(t)$ (kg).
Antag att de från början ($t = 0$) innehöll x_{10} och x_{20} kg salt och att lösningarna i bassängerna är helt omblandade (homogena) när vattnet flödar ut.
Du behöver inte lösa ekvationerna.

Lösning: Eftersom det till båda bassängerna kommer lika mycket vatten som det strömmar ut, är V_1 och V_2 konstanta.
Till bassäng 1 förs salt med hastighet $r_1 c$ (kg/min). Salt bortförs med hastighet $r_1 \frac{x_1}{V_1}$ (ty koncentrationen i bassäng 1 är $\frac{x_1}{V_1}$). Differentialekvationen för $x_1(t)$ blir alltså $\frac{dx_1}{dt} = r_1 c - r_1 \frac{x_1}{V_1} = r_1(c - \frac{x_1}{V_1})$ och det gäller $x_1(0) = x_{10}$.
Saltet som förs från bassäng 1 förs till bassäng 2, med hastighet $r_1 \frac{x_1}{V_1}$, och salt flödar ut ur bassäng 2 med hastighet $(r_1 + r_2)\frac{x_2}{V_2}$. Differentialekvationen för $x_2(t)$ blir alltså $\frac{dx_2}{dt} = r_1 \frac{x_1}{V_1} - r_2 \frac{x_2}{V_2}$ och det gäller $x_2(0) = x_{20}$.
Svaret blir alltså:

$$\boldsymbol{\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = r_1 c - r_1 \dfrac{x_1}{V_1} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = r_1 \dfrac{x_1}{V_1} - (r_1 + r_2)\dfrac{x_2}{V_2} \\ x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}}$$

Lösningar ks2 i 5B1206 Differentialekvationer I, 26 sep 2006

1) (Varje delfråga ger $\pm\frac{1}{2}$p eller 0p, summan rundas uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Följande differentialekvation har fem linjärt oberoende lösningar, alla definierade för $x > 2$: $\frac{1}{x}y^{(5)} + \frac{\sin x^2}{x-2}y'' - (x^2+1)y' = 0$. (Thm 4.4, sid. 133 i boken)	$\times$	
b)	Lösningarna till en homogen, linjär, ordinär differentialekvation kan alltid fås genom att lösa den karakteristiska ekvationen. (Bara om ekvationen har konstanta koefficienter)		$\times$
c)	Om $y_1(x), y_2(x)$ är lösningar till $y'' - \tan x\, y' + x\, y = 0$ och wronskideterminanten $W(y_1, y_2)(0) = 1$, så måste $W(y_1, y_2)(1) \neq 0$. (Högst upp sid. 133 i boken)	$\times$	
d)	För varje a finns precis en funktion $y(x)$ som uppfyller: $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y(a) = 0$. (Motex. som sid. 129 i boken)		$\times$
e)	”Variation av parametrarna” är en metod att finna fler lösningar till en homogen, linjär ekvation med hjälp av en lösning. (Det som beskrivs kallas ”reduktion av ordningen”)		$\times$
f)	För varje a finns precis en funktion $y(x)$ som uppfyller: $y'' + \cos x\, y' - (1-x^2)y = e^{x^2},\ y'(0) = a,\ y(0) = -1$. (Thm 4.1, sid. 127 i boken)	$\times$	

2) (3p) Verifiera att differentialekvationen

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0$$

har en lösning $y_1(x) = x$ och använd den för att finna den allmänna lösningen till ekvationen.

Lösning: Enligt metoden ”reduktion av ordningen” skriver vi lösningen $y(x)$ som $u(x)y_1(x) = xu(x)$.
Då fås $y' = xu' + u$ och $y'' = xu'' + 2u'$, så insättning i ekvationen ger $x^2(xu'' + 2u') - x(x+2)(xu' + u) + (x+2)xu = 0$, dvs $x^3u'' - x^3u' = 0$, så (integrerande faktor $\frac{e^{-x}}{x^3}$) $e^{-x}u'' - e^{-x}u' = (e^{-x}u')' = 0$. Således är $e^{-x}u' = c_1$, en konstant, och $u' = c_1e^x$, så $u = c_1e^x + c_2$. Således **svaret:**

$$\boldsymbol{y(x) = c_1xe^x + c_2x,}$$

där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.
Valet $c_1 = 0, c_2 = 1$ ger att $y_1(x) = x$ verkligen är en lösning till ekvationen.

3) (3p) Verifiera att differentialekvationen

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0, \quad x > 0$$

har lösningarna $y_1(x) = 1 + x$ och $y_2(x) = e^x$. Använd detta för att finna den allmänna lösningen till ekvationen

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^{2x}, \quad x > 0.$$

Lösning: Insättning av y_1 och y_2 i den homogena ekvationen visar att de är lösningar.
För att lösa den inhomogena ekvationen, använder vi variation av parametrar. Lösningen är då $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = (1+x)u_1(x) + e^x u_2(x)$, där u_1, u_2 uppfyller

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{2x} \end{pmatrix}$$

(xe^x är HL i ekvationen på standardform, $y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = xe^{2x}$.)

$$\begin{cases} (1+x)u_1' + e^x u_2' &= 0 \\ u_1' + e^x u_2' &= xe^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' &= -e^{2x} \\ u_2' &= (1+x)e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= -\frac{1}{2}e^{2x} + c_1 \\ u_2 &= xe^x + c_2 \end{cases},$$

där c_1, c_2 förstås är godtyckliga konstanter. Således $y(x) = (1+x)(-\frac{1}{2})e^{2x} + e^x xe^x + c_1(1+x) + c_2 e^x = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + c_1(1+x) + c_2 e^x$ och

Svar: Den allmänna lösningen är

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + c_1(1+x) + c_2 e^x,}$$

$\boldsymbol{c_1, c_2}$ **godtyckliga konstanter**