

Studenters bilder av matematiska begrepp och hur de påverkar problemlösningsförmåga

Olof Barr och Anna Torstensson
Centre for Mathematical Sciences
Lund University
Sweden
(barr,annat)@maths.lth.se

December 15, 2006

Abstract

Vi har undersökt de begreppsbilder förstaårsstudenter vid LTH har haft om olika matematiska begrepp vid första tentamenstillfället i matematik. Rapporten förordar att läraren, för att hjälpa individuella studenter med missuppfattningar kring olika begrepp, ska försöka att aktivera olika delar av begreppsbilderna hos studenten som motsäger varandra, så att studenten upplever konflikten och kan få hjälp med att förändra sin begrepps bild. Detta är naturligtvis väldigt tidskrävande och i praktiken utopiskt att uppnå i varje enskilt fall.

1 Introduktion

När man som lärare diskuterar matematik med sina studenter på grundläggande högskolenivå, och när man rättar deras tentamensskrivningar så stöter man ofta på resonemang som vid en första anblick verkar obegripliga. Å andra sidan verkar det orimligt att tro att matematiklärare skiljer sig på något fundamentalt sätt från matematikstudenter vad det gäller hur man tanke- och känslomässigt reagerar på olika situationer. Detta visar ju sig bland annat genom att rollerna genast kan bli de ombytta om man en stund senare börjar diskutera något område där studenten har stor erfarenhet. Om man jämför sina egna tankar kring något svårt forskningsproblem som man arbetar med är det inte heller svårt att leva sig in i studenternas situation. Den stora skillnaden tycks vara att det är begrepp och problemställningar av olika komplexitet och svårighetsgrad som förvirrar läraren respektive studenten. Man kan därför tänka sig att studenterna i grunden resonerar relativt rationellt

och logiskt utifrån sin utgångspunkt. Att resultatet ändå ofta inte blir det läraren väntat sig kan förklaras med att studenten inte har lika väl utvecklade begreppsbilder kring grundläggande matematiska begrepp som någon med större erfarenhet av matematik har.

1.1 Tidigare arbeten och teoribildning

Tankar liknande de ovanstående ledde Tall och Vinner till att införa distinktionen mellan begreppsbild och begreppsdefinition i [11]. Båda termerna refererar till individuella mentala konstruktioner, till skillnad från den formella begreppsdefinitionen som är den bland matematiker överenskomna definitionen. En individs begreppsdefinition är det sätt på vilket han eller hon för sig själv definierar ett givet begrepp. Det kan vara en (felaktig eller korrekt) memorering av den formella begreppsdefinitionen, men också en modifiering av begreppet som individen (oftast omedvetet) gjort för att passa in den i sin mentala struktur. Exempel på en begreppsdefinition av $\arccos(x)$ kan vara "inversen till cosinus", eller en instrumentell beskrivning såsom "inversknappen på miniräknaren". Den formella definitionen av $\arccos(x)$ är ju att det är inversen till restriktionen av $\cos(x)$ på intervallet $[0, \pi]$, men om man inte har inversbegreppet klart för sig kanske man inte ser något problem med att bilda en invers till cosinusfunktionen (utan någon restriktion av definitionsintervallet). Det kan också vara så att man vid närmare eftertanke kan tala om vad en invers är, men inte har aktiverat denna kunskap i samband med att man får uppgiften att tala om vad $\arccos(x)$ betyder.

Individens begreppsbild är hela det kognitiva nätverk som vävts kring begreppet. Begreppsbilden byggs upp och förändras genom olika erfarenheter. När det gäller komplicerade begrepp som exempelvis gränsvärden eller kontinuitet inom matematiken är det inte ovanligt att olika delar av begreppsbilden motsäger varandra hos en och samma individ. Detta upplevs inte som en konflikt så länge individen inte hamnar i en situation som aktiverar dessa motsägande delar av begreppsbilden samtidigt. När en sådan konflikt uppstår kan det leda till att personen modifierar delar av begreppsbilden för att den aktualiserade motsägelsen skall upphöra. Detta kan jämföras med Piagets allmänna teori för kognitiv utveckling där han beskriver två huvudsakliga sätt att ta till sig information från omvärlden. Det kan antingen ske genom assimilation, vilket innebär att ny data läggs till i en befintlig kognitiv struktur utan ändra den, eller genom ackommodation. Det senare är en process i vilken individen förändrar den aktuella kognitiva strukturen och skapar en ny, i ett försök att innefatta så väl tidigare erfarenheter som den aktuella. Om vi bygger vidare på exemplet med $\arccos(x)$ från matematikens värld kan vi tänka oss en person P som liksom ovan har begreppsdefinitionen "inversen till cosinus" av $\arccos(x)$ och vars begreppsbild av invers bland annat innehåller att funktio-

nen måste vara injektiv och att detta kan illustreras med att funktionens graf inte får skäras mer än en gång av någon linje parallell med x -axeln. Om vi nu ber P rita upp grafen till funktionen $y = \cos(x)$ och därefter illustrera hur funktionen $x = \arccos(y)$ definieras med hjälp av sin bild, så är det mycket möjligt att P blir förvirrad. Detta kan P hantera på olika sätt. Exempelvis kan P hålla fast vid sin kognitiva struktur och avfärda sin aktuella erfarenhet. Kanske tänker P att han kan ha ritat upp grafen felaktigt, men bryr sig inte om att undersöka det hela närmare. Han lägger kanske till sin erfarenhetsbank ett minne om att det kan hända konstiga saker vid invertering av cosinusfunktionen som är obehagliga och bör undvikas. P har i så fall ägnat sig åt assimilering. Alternativt kan man tänka sig att P vill gå till botten med problemet. Han kanske börjar fundera på om han verkligen minns rätt om inverser. Kanske var det linjer parallella med y -axeln som bara får skära funktionens graf högst en gång. I så fall blir $\cos(x)$ inverterbar och konflikten har upphört. (Exempelvis när P skall beskriva hur man får fram inversens värden från funktionens graf kommer dock en ny konflikt att uppstå.) En annan möjlighet är att P faktiskt erinrar sig att han har hört något om ett intervall i samband med $\arccos(x)$. Var det inte $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eller möjligen $[0, \pi]$? Nu ser P att om man bara tar ut den del av cosinus-grafen med definitionsmängd $[0, \pi]$ så kommer varje vågrät linje skära i högst en punkt. Också i detta fall upphör den aktuella konflikten. I de två senare fallen har P ägnat sig åt ackommodation. Ur matematikinläringssynpunkt är det sista fallet det största framsteget eftersom P modifierat sin bild av $\arccos$ så att den bättre stämmer överens med den matematiska definitionen. Detta gör också att risken för framtida konflikter mellan olika delar av begreppsbilder hos P minskar.

Dubinsky har vidareutvecklat Piagets idéer för beskrivning av just den kognitiva utveckling som äger rum då man ägnar sig åt matematik på högskolenivå [2]. Han identifierar fem olika typiska sätt på vilka ackommodation kan ske i denna situation. Särskilt intressant i detta sammanhang är ackommodation genom generalisering. Tall har lagt märke till att svårigheter i matematik ofta uppstår på grund av en form av generalisering som han kallar den generiska utvidgningsprincipen, något han utvecklade i [9], och citeras i hans senare artiklar. Denna innebär att en person som ser ett antal exempel på ett slags objekt vilka alla har en viss egenskap drar slutsatsen att alla objekt av detta slag har egenskapen i fråga. Om man till exempel definierar begreppet matris i en kurs som sedan handlar om diagonalisering kanske man hela tiden ger exempel med kvadratiske matriser. Då är det, om studenterna inte tidigare stött på matriser i andra sammanhang, stor risk att de tror att det ingår i begreppet matris att antalet rader skall vara lika stort som antalet kolumner.

En forskare som också intresserat sig mycket för begreppsbildning är psykologen Vygotsky. Utan att gå in närmare på hans övergripande teori kan vi se när-

mare på hans begrepp *närmaste utvecklingszon* som är relevant i detta sammanhang. En individs *aktuella utvecklingszon* är det område han eller hon redan behärskar, medan den närmaste utvecklingszonen är det område där systematisk inläring ger resultat. Inom denna zon kan man inte lösa problem på egen hand, men däremot med hjälp i form av exempelvis antydningar och tips. Bortom zonen saknas koppling till material i den aktuella utvecklingszonen, vilket enligt Vygotsky omöjliggör inläring. En maximalt givande diskussion om en students matematiska begrepp torde enligt Vygotsky till stor del röra sig inom just den närmaste utvecklingszonen där det finns oklarheter i begreppsbilderna men också stor möjlighet till påverkan och förändring av desamma.

En individs begreppsbild kan inte studeras direkt. Däremot påverkar våra begreppsbilder vårt agerande i konkreta situationer. På så vis kan man exempelvis i en students lösning av ett matematiskt problem finna spår av de bilder av begrepp relevanta för uppgiften som studenten har [5]. Vill man veta mer om en students begreppsbild kan man också tänka sig att man ger personen i fråga uppgifter att lösa som är specialdesignade för att spår av speciella begreppsbilder skall visa sig. Man kan naturligtvis också fråga direkt hur vederbörande definierar begreppet för sig själv och vilka mentala bilder som kommer upp när man diskuterar begreppet. Detta var den teoretiska utgångspunkten för hur vi lagt upp vår studie.

2 Undersökningen i detta arbete

I detta arbete ville vi undersöka LTH-studenters förståelse av vissa grundläggande begrepp vid tiden för första matematiktentamen (Analys I, oktober 2005). Exempelvis så saknas ofta grundläggande kunskaper om gränsvärde och derivata hos de underkända studenterna. Undersökningen skulle kunna peka fram viktiga aspekter hos begreppen som inte nått fram i undervisningen och vägleda lärare inför framtiden.

2.1 Metod och upplägg

I undersökningen valde vi ut tre olika deluppgifter från tentamen i Analys I (se bilaga), vilka skulle kunna återspegla kunskapsbrister kring grundläggande begrepp. Uppgifterna var:

2 c) Lös följande ekvation: $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 0.4 poäng

4 a) Funktionen f är deriverbar i x_0 . Hur definieras $f'(x_0)$. 0.2 poäng

4 b) Härled derivatan av $f(x) = e^x$. 0.3 poäng

Som ett första urval av studenter valde vi att endast titta på studenterna vid programmen D (Datateknik) och W (Ekosystemteknik), för en mer tidskrävande undersökning kunde naturligtvis samtliga tenderande på kursen valts ut, men vi bedömde att två av programmen borde relativt väl kunna avspegla de typer av misstag studenterna gjort vid dessa uppgifter. Totalt var det 65 tentor vi studerade närmare.

Vi gick igenom dessa studenters lösningar på de ovan nämnda uppgifterna och klassificerade dem utifrån vilken typ av misstag de gjort i sina lösningar vid tentamenstillfället. Utifrån denna klassificering tittade vi på vilka misstag som var mest frekventa och som samtidigt skulle kunna tyda på någon brist av förståelse av något grundläggande begrepp. Här var det alltså av mindre intresse att studera enklare former av räknfel eller slutledningsmisstag då detta är svårt att koppla till någon förståelsebrist av något grundläggande begrepp.

I den först nämnda uppgiften valde vi att titta närmare på de studenter som verkade ha problem med inversa funktioner i allmänhet och funktionen $\arcsin x$ i synnerhet. I den andra uppgiften kom huvudproblemet att handla om den snarast språkliga frågan om vad en definition är och då speciellt en matematisk definition, även om detaljerna naturligtvis rörde sig kring definitionen av derivata. Slutligen kom den tredje uppgiften att handla om lagarna för potensräkning och hur man kan minnas dem. Här var det också intressant att titta på kopplingen till uppgiften innan och se om och hur de använt sig av derivatans definition för att härleda derivatan av exponentialfunktionen.

Ur var och en av dessa tre grupper valde vi ut två representanter från studentgruppen, vilka skulle kunna sägas utgöra relevanta exempel på potentiella intervjuobjekt för längre kvalitativa intervjuer.

Slutligen kontaktades dessa sex studenter för intervjuer kring de respektive problem de valts ut för.

Frågorna i intervjun bestämdes att gå från det allmänna till det specifika för att avslutas med en titt på hur studenten ifråga svarat på just den specifika uppgiften vid tentamenstillfället.

Frågorna för den första uppgiften var frågorna av karaktären:

1. Vad är en invers funktion?
2. Vilka problem kan uppkomma då man skapar en invers funktion?
3. Hur ser den inversa funktionen till $\sin x$ ut?
4. Hur gör man för att få fram alla lösningar till ekvationerna $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\sin x = \frac{1}{5}$?
5. Avslutning med studentens lösningsförslag vid tentamenstillfället.

För den andra uppgiften var frågorna:

1. Vad är en definition?
2. Vad använder man definitioner till?
3. Hur definierar man derivatan?
4. Vad använder man derivatans definition till?
5. Avslutning med studentens lösningsförslag vid tentamenstillfället.

Och slutligen för den tredje uppgiften:

1. Vilka räknelagar finns det för potensräkning?
2. Hur kan man memorera dessa räknelagar?
3. Finns det något sätt att kolla om man har memorerat rätt?
4. Kan du lösa $3^{x+1} + 3^x = 18$?
5. Avslutning med studentens lösningsförslag vid tentamenstillfället.

Efter intervjuerna har vi sammanställt och analyserat svaren för att kunna belysa vilka begreppsliga problem studenterna har haft i de olika fallen.

Resultaten här är naturligtvis ett utslag av de enskilda studenternas svar på frågorna och de kvalitativa svar undersökningen ger kan naturligtvis inte svara på huruvida studenterna vi valt ut varit representativa i vårt urval. Däremot kan de kvalitativa svaren utsäga att det inte är otroligt att studenterna i varje problemkategori har likartade problem i sin uppfattning av de begrepp som undersökningen tagit fasta på.

2.2 Statistik

För att vi ska ha en uppfattning om hur enkla eller svåra de studerade uppgifterna har varit för studenterna vid tentamenstillfället presenterar vi här några tabeller över hur många poäng de har tilldelats vid respektive uppgift. Fördelning av poäng

på uppgift 2 c), uppdelat på kön var således

kön	antal	0	0.1	0.2	0.3	0.4
K	22	18%	0%	18%	9%	55%
M	42	38%	2%	12%	5%	38%

Fördelning av poäng på uppgift 4 a), uppdelat på kön var

kön	antal	0	0.1	0.2
K	22	30%	9%	61%
M	42	39%	7%	55%

och avslutningsvis var fördelningen av poäng på uppgift 4 b), uppdelat på kön

kön	antal	0	0.1	0.2	0.3
K	22	25%	4%	8%	63%
M	42	39%	2%	0%	59%

En uppdelning av resultaten på kvinnor respektive män visar att det finns signifikans ($p \approx 0.4$) för att kvinnorna har haft bättre resultat på de undersökta deluppgifterna. Men eftersom underlaget endast rör sig om 64 personer, bör man använda detta resultat med viss försiktighet.

Bland dessa tentamensskrivningar tittade vi sedan på de skrivningar som haft poängavdrag vid någon av de valda uppgifterna för att kunna gruppera skrivningarna efter den typ av fel som gjorts. Det utkristalliserade sig ganska snart, efter bortsorteringar av de som inte försökt alls och de som haft 0.1 poängs avdrag för räknefel, att den överväldigande majoriteten av de felaktiga svaren hamnade inom samma kategori.

Det vill säga, i uppgift 2 c) var det olika problem med inversa funktionen till $\sin x$, i uppgift 4 a) var det sammanblandningar mellan informella beskrivningar och formella definitioner samt i 4 b) var det problem med att komma ihåg och använda potenslagarna.

Något som är värt att poängtera är att flera tenderade (4 stycken) kunde det korrekta svaret på 4 a), men de hade istället skrivit ned det och använt det på uppgift 4 b), medan de i föregående uppgift hade svarat med en informell beskrivning istället för en formell definition. Detta tyder någonstans på att, utöver problemen som studenterna har med olika matematiska begrepp, det också finns ett språkligt problem där en del studenter exempelvis inte lärt sig vad som menas med en definition i matematiska sammanhang.

2.3 Sammanfattning av intervjuer

Intervjuerna med studenterna utfördes på så sätt att en av oss i huvudsak ställde frågorna och diskuterade med studenten, medan den andre antecknade. Studenten fick papper och penna till att rita och/eller anteckna med, ett material som sedan

sparades för att vi lättare skulle kunna redogöra för studentens tankegångar. Intervjuerna spelades också in på band, ifall vi skulle vilja gå tillbaka och exakt citera studenternas svar och kommentarer.

Av de sex stycken kontaktade studenterna fick vi endast tag på tre av dem. Lyckligtvis fördelade sig det stora bortfallet jämnt, vilket gjorde att intervjuundersökningen åtminstone hade en representant för varje uppgift vi valt att undersöka.

Här följer kortfattade referat av de 15-30 minuter långa intervjuerna.

Intervju 1 med student X om inverser

1-2. Då vi ber X om en definition av inversen till en funktion är han tveksam, men ritar efter en stund en bild på en funktion som ej är injektiv och förklarar att det inte får vara så att flera x -värden ger samma y -värde om funktionen skall ha invers. X förklarar ej närmare hur inversen kan illustreras med bilden och ger ej heller någon formell definition av invers.

3. X minns att $\arcsin(x)$ är invers till sinusfunktionen på ett visst intervall, men kan inte säkert minnas vilket intervall. Varför det är invers på ett intervall och inte på hela reella axeln har X ej reflekterat över tidigare, men han kommer så småningom (med viss ledning) fram till varför, genom att titta på grafen till $\sin(x)$. Han kan då också se att intervallet på vilket inversen definieras skall vara $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Intervjuare 1: Kan du säga något om sinus invers?

X: Det är väl... Det är väl arcsinus inom det här intervallet. Jag blandar ihop de här intervallen. Cosinus och tangens är väl $-\frac{\pi}{2}$ till $\frac{\pi}{2}$?

Intervjuare 2: Om du ritar upp sinusfunktionen så kanske du tänker på... det här problemet som vi pratade om i början. (Syftar på att det inte finns invers om ett y -värde svarar mot flera x -värden.)

X: Ja, jo givetvis. Det blir ju... För tar du ett intervall som går ända hit så har du ju 1,2,3,4 värden. Då blir det $\frac{\pi}{4}$. Nej, $\frac{\pi}{2}$ blir det. Just det, $\frac{\pi}{2}$ och $-\frac{\pi}{2}$. Ja, okej.

4. X börjar genast rita upp trianglar för att lösa det första problemet. De använder han för att hitta en vinkel vars sinusvärde är $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och lyckas på så sätt hitta lösningen $x = \frac{\pi}{4}$. Han förklarar sedan hur man får fram samtliga lösningar till ekvationen genom att se i enhetscirkeln vilka andra vinklar som har samma sinusvärde. X kan inte se att denna lösning har något med $\arcsin(x)$ att göra. När han ställs inför motsvarande problem med $\frac{1}{5}$ i högerledet istället för $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vet X ej hur han skall angripa det. Med hjälp lyckas han komma fram till att man kan ta fram ett första värde ur sinusgrafen genom att ta ut första positiva x -värdet som motsvarar $y = \frac{1}{5}$. X kan sedan resonera sig fram till samtliga lösningar med hjälp av enhetscirkeln

som i föregående problem. X nämner aldrig $\arcsin$ i samband med lösningen och tycks ej vara klar över att det är $\arcsin(\frac{1}{5})$ som han beräknar med hjälp av grafen.

5. X kan förklara stegen i sin lösning efter lite betänketid och ser nu klart att han missat att ta med vissa av lösningarna till ekvationen.

Intervju 2 med student Y om potensräkning

1. Y är osäker på vad som menas med frågan, men när han förstått den svarar han snabbt och korrekt med två av potenslagarna: $a^b a^e = a^{b+e}$ och $(a^b)^c = a^{cb}$. På förfrågan efter motsvarigheten till den första av dessa med division skriver han även upp $a^b / a^c = a^{b-c}$.

2-3. Y minns framför allt hur potensräkningen blir i speciella situationer. Han tar som exempel upp att man i högerledet till en differentialekvation kan få $e^{-x} e^{ix}$ och då skall skriva om det som e^{-x+ix} . (Detta var aktuellt för studenten vid tillfället eftersom det nyligen gått igenom på en kurs han läste.) Y berättar också att han först nyligen fått potenslagarna klara för sig och att det skett just i samband med att han arbetat med differentialekvationer. Han är medveten om att han saknar vissa grundkunskaper och att det orsakar honom svårigheter i matematikstudierna. Då vi frågar om han brukar sätta in siffror i potenslagarna för att kontrollera att han minns dem korrekt säger han att det kan man göra som en sista metod om man inte kommer på något annat.

Intervjuare 1: Du kunde ju de här (syftar på potenslagarna) väldigt bra, men hur kan man göra för att minnas dem? Alltså, kan man ha någon minnesregel eller så för att...

Y: ... för att underlätta?

Intervjuare 1: Ja, precis. Om man inte är säker på hur man gjorde. Eller sitter de bara som ett rinnande vatten?

Y: Nej, inte riktigt.

Intervjuare 1: Det tyckte jag i och för sig att de gjorde.

Y: Jo, jo. Men man tänker ju som till exempel den här $a^{(b+c)}$ där tänker man ju på... Jag kan inte komma på något sådär jättebra exempel men...

Intervjuare 1: Men om man...

Y: Man kan ju till exempel tänka som nu när vi räknar med andra ordningens differentialekvationer...

Intervjuare 1: Ja?

Y: ...så kan man ju få följande scenario i högerledet att e^{-x} gånger $\sin(x)$. Då kan man ju skriva om det här som e^{ix} . Det har jag som minnesregel att då kan man göra det i alla fall. Det är väl så jag tänker nu för tiden.

Intervjuare 1: Ja.

Y: Det var väl då det började lossna, när vi kom in där.

4. Y börjar genast med den korrekta omskrivningen $3^{x+1} = 3^x 3$, men har sedan svårt att se hur han skall komma vidare. Han logariterar höger och vänsterled och använder därvid felaktiga logaritmlagar. Sedan kör han fast. När vi frågar om han kan försöka utan logaritmer kommer han efter en stund på att man kan dela ekvationen med 3^x och löser så småningom problemet.

5. Y uppger att han vid tillfället mindes att svaret skulle bli e^x . Under skrivningen kände han sig säker på att han var på rätt väg i sin lösning, men nu efteråt ser han genast felet i uträkningen.

Intervju 3 med student Z om definitioner

1. Z beskriver att en definition är en exakt beskrivning av något, ett sätt att sätta gränser för vad som skall inkluderas i ett begrepp och vad som inte skall ingå. Detta gäller även matematiska definitioner. Som exempel tar Z upp deriveringsregler och säger att där är definitionen av derivata som används. Om denna säger han att det handlar om vad som händer när man har någon funktion och närmar sig en viss punkt.

2. Z säger att derivatan är funktionens lutning i en punkt. Han kan ej ge den formella definitionen av derivatan som gränsvärde, men känner igen den och kan fylla i de sista orden när vi upprepar den. Z berättar att som han ser det är den formella definitionen inte särskilt viktigt. Han inriktar sig istället på att lära sig mer mekaniskt hur man löser olika typer av problem.

Intervjuare 1: (Om derivata) Hur är definitionen då?

Z: Det har jag svårt att säga. Det vet jag inte.

Intervjuare 2: Nej, det är ju inte lätt alltså.

Intervjuare 1: Men om du har någon konkret uppgift, någon funktion, e^x till exempel, och skall härleda derivatan av den. Hur skulle du gå till väga då? Du får gärna skriva.

Z: Jag skulle... Det är svårt att säga. Jag bygger ju mycket av min, mina lösningar... Nu är jag inte världens bästa på matte, men det är ju mycket bara genom att sitta som man bygger upp en erfarenhetsbank skulle jag vilja säga. Man lär sig att känna igen mer än vad det egentligen är den djupa förståelsen för vad problemet innebär så ofta är det ju att man har stött på ett problem och löst det och sedan har man löpt igenom de varianterna så många gånger så att man nästan mekaniskt vet hur det går till mer än man teoretiskt vet hur det skall gå till.

3. Z uppger att han inte kan härleda derivatan till e^x men att han vet vad den blir och att det är det som är viktigt när han skall lösa problem. Han siktar mer in sig på att memorera relevanta regler och tekniker än att arbeta med begreppens definitioner. På detta sätt säger han sig "bygga upp en erfarenhetsbank". Han anser att man oftast inte hinner förstå begreppen under kursens gång och har därför tillägnat sig arbetssättet som beskrivs ovan. Ibland har han upplevt en ökad förståelse för begreppen efter avslutad kurs då han arbetat vidare med dem i andra sammanhang.

4. Vid tentamenstillfället var Z egentligen övertygad om att hans svar inte var det som söktes, men eftersom detta var vad han visste om derivata skrev han det i alla fall. Han anade att svaret egentligen skulle vara något mer exakt.

Efter intervjun förklarade vi hur Z:s beskrivning av derivata som funktionens (egentligen tangentens) lutning hänger samman med den formella definitionen som gränsvärde. Z tyckte att denna förklaring var givande och berättade att han inte gjort någon koppling av det slaget tidigare.

3 Slutsatser, diskussion och sammanfattning

3.1 Slutsatser

Teorin om begreppsbilder verkar vara en fruktbar förklaringsmodell för matematikundervisning på grundläggande universitetsnivå. Urvalet av försökspersoner i vår studie är så litet att man omöjligt kan dra några säkra generella slutsatser, men materialet ger ändå indikationer på att vissa missförstånd kring grundläggande begrepp såsom inverser av funktioner, gränsvärden och derivata samt en allmän svårighet att skilja definitioner från mer intuitiva beskrivningar av begrepp ligger bakom en stor del av de felaktiga slutledningar som studenter gör i en tentamenssituation. En tänkbar konsekvens för undervisningen är att mer direkt sträva efter att få upp studenternas begreppsbilder till ytan speciellt att försöka aktivera olika delar av begreppsbilderna som motsäger varandra så att studenten upplever konflikten och kan få hjälp att förändra sin begrepps bild. Det verkar också behövas mer diskussion kring skillnaden mellan formella definitioner och intuitiva bilder och sambanden mellan dem. Det verkar i första hand vara de intuitiva bilderna som används vid problemlösning och de är därför mycket viktiga, men om koppling till den formella definitionen saknas är risken för felslut exempelvis genom att använda den generiska utvidgningsprincipen uppenbar.

3.2 Diskussion

En intressant aspekt av intervjusituationen med de enskilda studenterna är hur givande ett enskilt samtal mellan lärare och student kan vara. Genom att långsamt gå igenom ett ämne, där studenten får förklara hur den tänker, kombinerat med små hjälpsamma ledtrådar, visar det sig att studenten verkligen kan reda ut de problem den haft med en specifik begreppsförståelse. Det kan liknas vid Platons dialog Menon [8], där Sokrates lär en liten gosse att om man vill dubbla arean av en kvadrat, så ska man inte dubbla sidans längd, utan använda diagonalen i ursprungskvadraten till ny sidlängd. Platon vill med detta säga att kunskapen hela tiden fanns förborgad i den lilla pojken och att den kunde lockas fram av en förlossare, i det här fallet Sokrates.

Vi tror dock inte att begreppskunskaperna vi talat om i den här uppsatsen är något som ligger förborgat inne i studenterna, och att det inte heller var fallet med gossen i dialogen Menos. Det är snarare yttre hjälp, och små tips, som stimulerar studentens slutledningsförmåga till att se sambanden mellan exempelvis informella beskrivningar av begrepp och formella matematiska definitioner.

Ytterligare en beskrivning av hur begrepp, definitioner och begreppsbilder växer fram kan man läsa i Lakatos bok *Proofs and Refutations* [6]. Här diskuterar matematikstudenterna Alpha, Beta, Gamma och Delta kring ett grafteoretiskt problem och de olika karaktärerna har olika roller i diskussionen. Exempelvis är en av dem väldigt intuitiv och rusar iväg med tankarna, medan en annan är stringent och formell och vill inte godta icke-formella bevis. I diskussionen kan man likna de olika personerna som olika delar av en matematikstuderandes inre som diskuterar med sig själv. Här får man en bild av hur begreppsbilder och begrepp växer fram inom ett medvetande som konstant försöker se problemet från olika synvinklar. Ibland uppstår konflikter mellan de begreppsbilder som växt fram under deras diskussion, varpå de återigen får analysera problemet och de definitioner de skapat tidigare. En fråga som ställs generellt är hur man kan veta att det system som byggts upp faktiskt är motsägelsefritt och att bevisen faktiskt är korrekta.

I vår studie har vi enbart interjuat personer som har misslyckats med att lösa vissa tentamensuppgifter och sett att de verkligen hade vaga eller felaktiga uppfattningar om de begrepp som var väsentliga för lösning av de aktuella uppgifterna. Härifrån kan vi dock inte dra några slutsatser om begreppsbildningen hos studenter som lyckas lösa uppgifterna. En hypotes är att dessa studenter har mer fullständiga begreppsbilder och en högre grad av koppling mellan sina intuitiva bilder kring begreppen och sin begreppsdefinition, men det är också möjligt att dessa studenter framgångsrikt ägnat sig åt att memorera vissa typlösningar. Detta skulle kunna undersökas närmare genom att intervjua en grupp studenter som lyckats med de aktuella tentamensuppgifterna enligt samma modell som de intervjuer vi genom-

fört.

Övriga observationer:

Vi granskade i detalj lösningarna till vissa uppgifter som 40 studenter lämnat in och vid denna granskning lade vi märke till vissa skillnader i de bedömningar olika rättare hade gjort. Det fanns exempel på snarlika lösningar som gett helt olika poäng därför att en rättare bedömt det som att studenten helt missförstått problemet medan en annan betraktade det som en mindre miss i ett i huvudsak riktigt resonemang. Det fanns också exempel på delar av uppgifter där olika rättare genomgående hade varit mer generösa i sin bedömningar än andra.

3.3 Sammanfattning

Vi har undersökt de begreppsbilder förstaårsstudenter vid LTH har haft om olika matematiska begrepp vid första tentamenstillfället i matematik. Rapporten förordar att läraren, för att hjälpa studenter med missuppfattningar kring olika begrepp, ska försöka att aktivera olika delar av begreppsbilderna hos studenten som motsäger varandra, så att studenten upplever konflikten och kan få hjälp med att förändra sin begreppsbild. Eftersom det inte finns tid och resurser för individuell undervisning i någon större utsträckning kan man tänka sig att läraren, med sin erfarenhet om vilka missuppfattningar som brukar förekomma, diskuterar begrepp och begreppsbilder med studenterna i större grupper och allmänt försöker uppmuntra studenterna till egna diskussioner kring begreppen.

3.3.1 Bilagor

Bifogat till uppsatsen finns också:

1. Tentamen i Analys I, vilken vi hämtat uppgifter från.
2. Lösningar till de undersökta deluppgifterna.

References

- [1] B. Sutter, Introduktion till Vygotsky www.dwr.bth.se/Members/Berthel/Papers/VygBS1.pdf, 2006-01-24.
- [2] E. Dubinsky, Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking *Advanced Mathematical Thinking* Kluwer: Holland 95–126, 1991.
- [3] K. Juter, Limits of functions – how do students handle them?, in *Pythagoras* 61, 36–46, 2005.

- [4] K. Juter, Students' Attitudes to Mathematics and Performance in Limits of Functions, in *Mathematics Education Research Journal* 2005, Vol. 17, No. 2, 91–110.
- [5] K. Juter, Limits of functions: Traces of students' concept images, *submitted*.
- [6] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge, 1976.
- [7] J. H. Mason, *Mathematics Teaching Practice – A Guide for University and College Lecturers*, Horwood Publishing Series in Mathematics and Applications, Eastbourne 2002.
- [8] Platon, *Menon*. I Platon: Skrifter. Bok 2. Red. Jan Stolpe. Stockholm: Atlantis, 2001. Sid. 30–43.
- [9] D. O. Tall, Building and testing a Cognitive Approach to the Calculus using Computer Graphics. *Ph D Thesis* Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, 1986.
- [10] D. O. Tall, The Psychology of Advanced Mathematical Thinking *Advanced Mathematical Thinking* Kluwer: Holland 3–21, 1991.
- [11] D. O. Tall and S. Vinner, Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, in *Educational Studies in Mathematics*, **12** 151–169, 1981.