Alternativ lösning ex 10.8

1. Vi har tre variabler, x_1, x_2 och x_3.
   Jag använder bivillkoren och löser ut x_1 och x_3 som beroende av x_2.
   x_2 sätts till v, en fri variabel.

   Notera formeln (*)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{z}\underbrace{v}_{v}$$

   som har samma form som i nollrumsmetoden.
   (Det vi gör är ekvivalent med nollrumsmetoden)

2. Stoppa in uttrycket för x i målfunktionen och lös det en-dimensionella problemet!
   (Dimensionen efter insättning är dimensionen på nollrummet, ker(A))

3. Använd $\hat{v}$ till att räkna ut $\hat{x}$!

1) Bivillkoren

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad Ax = b$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2x_2 - 3x_3 & (1) \\ x_3 = 14 - 3x_1 - 2x_2 & (2) \end{cases}$$

(1) i (2):

$$x_3 = 14 - 3(10 - 2x_2 - 3x_3) - 2x_2 =$$

$$= 14 - 30 + 6x_2 + 9x_3 - 2x_2 =$$

$$= 14 - 30 + 4x_2 + 9x_3$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-8x_3 = -16 + 4x_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{x_3 = 2 - \tfrac{1}{2}x_2}$$

$$x_1 = 10 - 2x_2 - 3x_3 = 10 - 2x_2 - 3(2 - \tfrac{1}{2}x_2) =$$

$$= 10 - 2x_2 - 6 + \tfrac{3}{2}x_2 =$$

$$= 4 - \tfrac{1}{2}x_2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{x_1 = 4 - \tfrac{1}{2}x_2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{z} v \qquad (*)$$

$$\boxed{x_2 = v}, \quad v \in \mathbb{R}$$

Målfunktionen

2) $f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$

$$= \frac{1}{2}(4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3)$$

Nu: Sätt in $x = [4 - \frac{1}{2}v \ , v \ , 2 - \frac{1}{2}v]$

$$f(\bar{x} + Zv) = \frac{1}{2}\Big[4(4 - \tfrac{1}{2}v)^2 + 4v^2 + 4(2 - \tfrac{1}{2}v)^2 - 4(4 - \tfrac{1}{2}v)v - 4(4 - \tfrac{1}{2}v)(2 - \tfrac{1}{2}v) - 4v(2 - \tfrac{1}{2}v)\Big]$$

$$= \ldots =$$

$$= \frac{9}{2}v^2 - 18v + 24$$

Derivera och sätt $= 0$!

$f'(v) = 9v - 18 = 0 \Rightarrow \hat{v} = 2$

$f''(v) = 9 > 0$ minimum!

3) Sätt in i x!

$$\hat{x} = \bar{x} + Zv = [4 - \tfrac{1}{2} \cdot 2 \ , 2 \ , 2 - \tfrac{1}{2}2]^T = [3 \quad 2 \quad 1]^T$$