4.25 - faltningsformeln

Givet är att $Z = X + Y$ där X och Y är oberoende s.v. med täthetsfunktioner

$$f_X(x) = e^{-x},\ x \geq 0, \qquad f_Y(y) = 1,\ 0 \leq y \leq 1.$$

Vi söker $f_Z(z)$. Enligt *faltningsformeln for oberoende kontinuerliga s.v.* (se sidan 97 i läroboken) är

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx. \tag{1}$$

Vi härledde (1) på övningen.

Täthetsfunktionen $f_X(x)$ är nollskild på området $x \in [0, \infty)$ medan $f_Y(z-x)$ är nollskild på ett område som beror på z,

$$f_Y(z-x) = \begin{cases} 1, & z - x \in [0,1] \\ 0, & \text{annars} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in [z-1, z] \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Vi får alltså bidrag i integralen från alla x i området $[0, \infty) \cap [z-1, z]$, annars är antingen $f_X(x) = 0$ eller så är $f_Y(z-x) = 0$. Vi får tre olika fall:

$\underline{z < 0}$
I detta fall är $[0, \infty) \cap [z-1, z] = \emptyset$ och $f_Z(z) = 0$.

$\underline{z \in [0, 1]}$
I detta fall är $[0, \infty) \cap [z-1, z] = [0, z]$. Vi får

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^z = 1 - e^{-z}.$$

$\underline{z > 1}$
I detta fall är $[0, \infty) \cap [z-1, z] = [z-1, z]$. Vi får

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{z} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_{z-1}^{z} = e^{-(z-1)} - e^{-z} = e^{-z}(e-1).$$

Sammaställer vi resultaten får vi tätheten för Z:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & z \in [0,1] \\ e^{-z}(e-1), & z > 1 \\ 0, & z < 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(e^{\min(1,z)} - 1\right) e^{-z}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Man kan använda faltningsformeln på två sätt, förutom (1) har vi också

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x) f_Y(x)dx. \tag{2}$$

Härledningen av (2) görs på precis samma sätt som för (1). Nu är täthetsfunktionen $f_Y(x)$ nollskild på $[0,1]$ (som inte beror på z!) medan $f_X(z-x)$ är nollskild på ett område som beror på z,

$$f_X(z-x) = \begin{cases} e^{-(z-x)}, & z-x \in [0,\infty) \\ 0, & \text{annars} \end{cases} = \begin{cases} e^{-(z-x)}, & x \in (-\infty, z] \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Vi får alltså bidrag från integralen när x ligger i området $(-\infty, z] \cap [0,1]$. Vi får tre olika fall:

$\underline{z < 0}$
I detta fallet är $(-\infty, z] \cap [0,1] = \emptyset$ och $f_Z(z) = 0$.

$\underline{z \in [0,1]}$
I detta fallet är $(-\infty, z] \cap [0,1] = [0,z]$ och

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = \left[e^{-(z-x)}\right]_0^z = 1 - e^{-z}.$$

$\underline{z > 1}$
I detta fallet är $(-\infty, z] \cap [0,1] = [0,1]$ och

$$f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = \left[e^{-(z-x)}\right]_0^1 = e^{-(z-1)} - e^{-z} = e^{-z}(e-1).$$

Sammanställer vi resultatet får vi samma resultat som när vi använde (1)!