3.7 - dragning utan återläggning

I urnan finns 4 vita och 6 svarta kulor, vi drar 3 stycken (utan återläggning). Vi är intresserade av sannolikheten att ha dragit k vita kulor. Låt den stokastiska variablen X vara antalet vita vi får vid vår dragning. Enligt *den klassiska sannolikhetsdefinitionen* är den

$$P(X = k) = \frac{\text{Antalet för händelsen gynnsamma fall}}{\text{Antalet möjliga fall}}.$$

Total antal möjliga dragning är enligt *multiplikationsprincipen*

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{(10-3)!}.$$

Antal sätt att få en viss sekvens av 0 vita och 3 svarta ($k = 0$) är

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{4!}{(4-0)!} \frac{6!}{(6-3)!}.$$

Antal sätt att få en viss sekvens av 1 vit och 2 svarta ($k = 1$) är

$$4 \cdot (6 \cdot 5) = \frac{4!}{(4-1)!} \frac{6!}{(6-2)!}.$$

Antal sätt att få en viss sekvens av 2 vita och 1 svart ($k = 2$) är

$$(4 \cdot 3) \cdot 6 = \frac{4!}{(4-2)!} \frac{6!}{(6-1)!}.$$

Antal sätt att få en viss sekvens med 3 vita och 0 svarta ($k = 3$) är

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{3!}{(4-3)!} = \frac{4!}{(4-3)!} \frac{6!}{(6-0)!}.$$

Vi ser mönstret: antalet sätt att få en viss sekvens med k vita och $3 - k$ svarta är

$$\frac{4!}{(4-k)!} \frac{6!}{(6-(3-k))!}.$$

Det finns enligt sats 2.7 i Blom

$$\binom{3}{k} = \frac{3!}{k!(3-k)!}$$

sekvenser av längd 3 med k vita.

Vi får alltså att

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \binom{3}{k}\frac{4!}{(4-k)!}\frac{6!}{(6-(3-k))!}\Big/ 10\cdot 9\cdot 8 \\
&= \frac{3!}{k!(3-k)!}\frac{4!}{(4-k)!}\frac{6!}{(6-(3-k))!}\Big/\frac{10!}{(10-3)!} \\
&= \frac{4!}{(4-k)!k!}\frac{6!}{(6-(3-k))!(3-k)!}\Big/\frac{10!}{(10-3)!3!} \\
&= \binom{4}{k}\binom{6}{(3-k)}\Big/\binom{10}{3} \\
&= \frac{\binom{10\cdot 4/10}{k}\binom{10\cdot(1-4/10)}{(3-k)}}{\binom{10}{3}}.
\end{aligned}
$$

Detta är sannolikhetsfunktionen för en *hypergeometriskt fördelad* stokastisk variabel (se formelsamlingen)

$$X \sim \mathrm{Hyp}(10, 3, 4/10).$$

En variabel X är hypergeometriskt fördelad $\mathrm{Hyp}(N, n, p)$ om $\{X = k\}$ är händelsen att k av n dragningar (utan återläggning) ur en total mängd av storlek N lyckas och sannolikheten för att den första dragning lyckas är p. Våra 3 dragningar ur en urna med 10 kulor, där första dragningen har sannolikhet $4/10$ att lyckas (4 av 10 kulor i urnan är vita) passar såklart in i denna beskrivning!