Lektion 7, Flervariabelanalys den 1 februari 2000

12.9.2 Bestäm Taylorserien till funktionen

$$f(x,y) = \log(1+x+y+xy)$$

i punkten $(0,0)$.

Vi kan faktorisera argumentet till logaritmen och förenkla funktionen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \log(1+x+y+xy) = \log\big((1+x)(1+y)\big) \\ &= \log(1+x) + \log(1+y). \end{aligned}$$

Nu kan vi Taylorutveckla termerna separat,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{y^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k + y^k}{k}. \end{aligned}$$

12.9.8 Bestäm Taylorpolynomet för funktionen

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

av grad 3 i punkten $(1,0)$.

Först skriver vi om argumentet till logaritmen i termer av $x-1$ och y

$$x^2+y^2 = (x-1)^2 - 1 + 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 + 2(x-1) + 1.$$

Sätt $t = (x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)$. Då är

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \log(t+1) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + O(t^4) \\ &= \big((x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)\big) - \tfrac{1}{2}\big((x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)\big)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\big((x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)\big)^3 + O(x-1,y)^4 \\ &= (x-1)^2 + y^2 + 2(x-1) - \tfrac{1}{2}\big((x-1)^2 \cdot 2(x-1) + y^2 \cdot 2(x-1) \\ &\quad + 2(x-1)(x-1)^2 + 2(x-1)y^2 + 2(x-1)2(x-1) + O(x-1,y)^4\big) \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\big(8(x-1)^3 + O(x-1,y)^4\big) + O(x-1,y)^4 \\ &= 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2 + \tfrac{2}{3}(x-1)^3 - 2(x-1)y^2 + O(x-1,y)^4 \end{aligned}$$

Taylorpolynomens entydighetssats ger att Taylorpolynomet av grad 3 är

$$P_3(x,y) = 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2 + \tfrac{2}{3}(x-1)^3 - 2(x-1)y^2.$$

12.9.12 Bestäm Taylorpolynomet för funktionen

$$f(x,y) = \frac{1+x}{1+x^2+y^4}$$

av grad 2 i punkten $(0,0)$.

Vi kan skriva om funktionen som en produkt av två faktorer

$$f(x,y) = (1+x) \cdot \frac{1}{1+x^2+y^4}.$$

Den första faktorn är sitt eget Taylorpolynom. I den andra faktorn sätter vi $t = x^2 + y^4$ och får

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1+x) \cdot \frac{1}{1+t} = \{\, \text{geometrisk serie} \,\} \\ &= (1+x) \cdot \big(1 - t + O(t^2)\big) = (1+x) \cdot \big(1 - (x^2+y^4) + O(x,y)^3\big) \\ &= 1 - x^2 + x + O(x,y)^3. \end{aligned}$$

Taylorpolynomens entydighetssats ger att Taylorpolynomet av grad 2 är

$$P_2(x,y) = 1 + x - x^2.$$

13.1.2 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = xy - x + y.$$

En punkt p är en kritisk punkt om

$$\nabla f(p) = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

I vårt fall är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 1, \qquad \nabla f = (y-1, x+1).$$

Villkoret $(*)$ ger därför att

$$\begin{cases} y - 1 = 0, \\ x + 1 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Punkten $p = (-1, 1)$ är alltså den enda kritiska punkten.

Punktens karaktär avgörs av funktionens andraderivator i Taylorutvecklingen i punkten

$$f(p + \boldsymbol{h}) = f(p) + \boldsymbol{h}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{h} + O(\boldsymbol{h})^3.$$

Om den kvadratiska formen är positiv, negativ eller indefinit så är p en lokal minimi-, maximi- respektive sadelpunkt.

Vi har att Hessianen i p är

$$H(-1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

H:s egenvärden ges av den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(\lambda I - H) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda = -1 \quad \text{eller} \quad \lambda = +1.$$

Eftersom egenvärdena är -1 och $+1$ har den kvadratiska formen den kanoniska formen

$$-(h_1')^2 + (h_2')^2,$$

vilket betyder att det finns en riktning där den kvadratiska formen är negativ och en riktning där den är positiv, d.v.s. den är indefinit och p är en sadelpunkt.

13.1.4 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

De kritiska punkterna uppfyller

$$\nabla f = \mathbf{0}, \qquad (*)$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x.$$

Alltså är $(*)$

$$4x^3 - 4y = 0, \qquad (1)$$
$$4y^3 - 4x = 0. \qquad (2)$$

Från (1) får vi att $y = x^3$. Detta insatt i (2) ger

$$x^9 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 1.$$

Ekvationsystemet (1), (2) har alltså lösningarna

$$(x,y) = (0,0), \quad (1,1) \quad \text{och} \quad (-1,-1).$$

Dessa kritiska punkters karaktär avgörs av den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen, d.v.s. av om Hessianen

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

är positiv, negativ eller indefinit.

Vi undersöker punkterna var för sig.

$(0,0):$ Vi har

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(\lambda I - H) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -4 \quad \text{eller} \quad \lambda = 4.$$

Eftersom ett egenvärde är negativt och ett är positivt är H indefinit och $(0,0)$ en sadelpunkt.

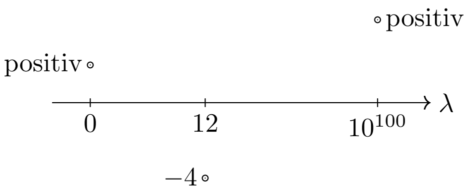
$(1,1):$ Vi har

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(\lambda I - H) = \begin{vmatrix} \lambda - 12 & 4 \\ 4 & \lambda - 12 \end{vmatrix} = (\lambda - 12)^2 - 4.$$

Istället för att lösa ekvationen kan vi beräkna HL i några lämpliga punkter.



Satsen om mellanliggande värden ger nu att de två rötterna ligger i vart och ett av intervallen $(0,12)$ respektive $(12,10^{100})$, d.v.s. H har två positiva egenvärden och är positivt definit.

$(1,1)$ är en lokal minimipunkt.

$(-1,-1):$ Vi har

$$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Detta är samma matris som ovan. Alltså är H positivt definit och $(-1,-1)$ är en lokal minimipunkt.

13.1.6 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = \cos(x+y).$$

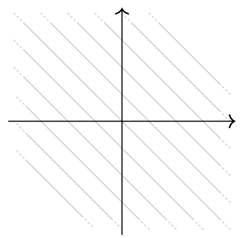
Gradienten till f är

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \big(-\sin(x+y), -\sin(x+y)\big)$$

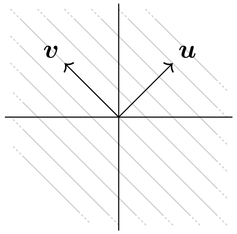
som är en nollvektor då

$$-\sin(x+y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y = n\pi \quad (n \text{ heltal}).$$

De kritiska punkterna är alltså en samling linjer.



Eftersom linjerna har denna orientering är det naturligt att byta basvektorer i $\boldsymbol{R}^2$ till en bas där en av vektorerna är parallell med linjerna.

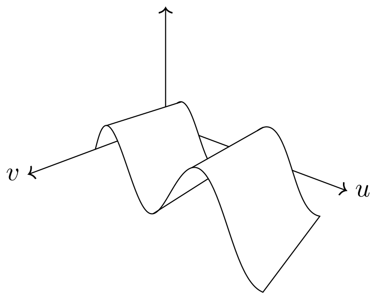


$\boldsymbol{u} = (1,1)$
$\boldsymbol{v} = (-1,1)$

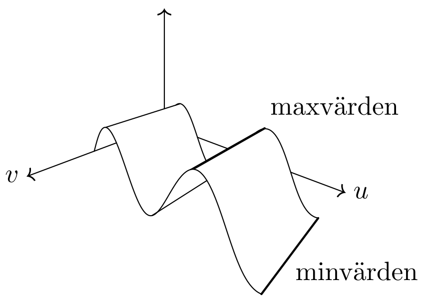
Om vi betecknar koordinaterna i denna bas med (u, v) så är

$$f(u,v) = \cos u.$$

Eftersom f bara beror på u så har f en graf med utseendet



d.v.s. grafen har samma utseende längs v-axeln och är en s.k. cylindermängd. Om $f(u) = \cos u$ därför har ett lokalt max i $u = u_1$ så har $f(u,v)$ en hel "rygg" med maxpunkter; dito för min- och sadelpunkter.



Vi vet att $f(u) = \cos u$ har

$$\begin{aligned} &\text{lokala max i } u = 2n\pi \ (n \text{ heltal}),\\ &\text{lokala min i } u = (2n+1)\pi \ (n \text{ heltal,}) \end{aligned}$$

vilket betyder att $f(u,v)$ har

$$\begin{aligned} &\text{lokala max längs linjerna } u = 2n\pi \ (n \text{ heltal}),\\ &\text{lokala min längs linjerna } u = (2n+1)\pi \ (n \text{ heltal}), \end{aligned}$$

eller översatt till x, y-koordinater

$$\begin{aligned} &\text{lokala max längs linjerna } x + y = 2n\pi \ (n \text{ heltal}),\\ &\text{lokala min längs linjerna } x + y = (2n+1)\pi \ (n \text{ heltal}). \end{aligned}$$

13.1.12 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - x + y + x^2 + y^2}.$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{(1 - x + y + x^2 + y^2)^2} \cdot (-1 + 2x),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{(1 - x + y + x^2 + y^2)^2} \cdot (1 + 2y). \end{aligned}$$

Gradienten till f blir noll i punkten $(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Istället för att undersöka Hessianen i den kritiska punkten noterar vi att nämnaren i funktionsuttrycket är ett kvadratiskt uttryck som vi kan kvadratkomplettera; först med avseende på x och sedan med avseende på y,

$$\begin{aligned}1 - x + y + x^2 + y^2 &= 1 + (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} + y + y^2\\ &= \tfrac{3}{4} + (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\\ &= \tfrac{1}{2} + (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2.\end{aligned}$$

Från detta uttryck ser vi att nämnaren har ett minimum i den kritiska punkten $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, vilket ger att funktionen har ett maximum i punkten $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

13.1.18 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

Funktionen antar sitt största respektive minsta värde i en av följande punkter:

1. kritiska punkter, d.v.s. där $\nabla f = \mathbf{0}$,
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter till definitionsområdet.

Vi undersöker dessa punkter

1. De kritiska punkterna uppfyller

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = (0, 0).$$

Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (1 + x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{0 \cdot (1 + x^2 + y^2) - x \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$(*)$ ger alltså ekvationssystemet

$$1 - x^2 + y^2 = 0, \qquad (1)$$
$$-2xy = 0. \qquad (2)$$

Ekvation (2) ger att antingen är $x = 0$ eller så är $y = 0$.

$x = 0$: Ekvation (1) ger $1 + y^2 = 0$ som saknar reella lösningar.

$y = 0$: Ekvation (1) ger $1 - x^2 = 0$ som har lösningarna $x = -1$ och $x = 1$.

De kritiska punkterna är alltså $(-1, 0)$ och $(1, 0)$.

2. Betraktar vi uttrycket för ∇f,

$$\nabla f = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}(1 - x^2 + y^2, -2xy),$$

så ser vi att ∇f är definierad överallt (nämnaren $\geq 1 > 0$).

3. Eftersom f:s definitionsmängd är hela talplanet är den enda s.k. randpunkten då vi låter $\|(x, y)\| \to \infty$.

Funktionens största och minsta värde är något av följande värden

$$\begin{aligned}f(-1, 0) &= -\tfrac{1}{2},\\ f(1, 0) &= \tfrac{1}{2},\\ \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Svaret är

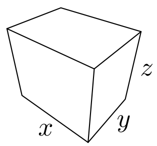
Största värde $\frac{1}{2}$ i punkten $(1, 0)$.
Minsta värde $-\frac{1}{2}$ i punkten $(-1, 0)$.

Anm. Vi behöver inte undersöka de kritiska punkternas karaktär med Hessianen, utan det räcker med att jämföra f:s värde i de framtagna punkterna för att bestämma största/minsta värde.

Anm. Hade gränsvärdet varit störst eller minst skulle f inte haft ett största respektive minsta värde.

13.1.22 Materialet som används för bottenplattan till en rektangulär låda kostar dubbelt så mycket per areaenhet än materialet som används för sidoväggar och ovansida.
Bestäm lådans dimensioner som för en given volym V minimerar materialkostnaden.

Vi inför tre variabler x, y och z som anger lådans dimensioner.



Om materialet till bottenplattan kostar $2A$ per areaenhet så kostar materialet till sidoväggar och ovansida A per areaenhet.
Hela lådans kostnad blir

$$\begin{aligned} K(x,y,z) &= 2A\cdot(\text{bottenplattans area}) \\ &\quad + A\cdot(\text{sidoväggarnas area} + \text{ovansidans area}) \\ &= 2A\cdot xy + A\cdot(2xz+2yz+xy) = A(3xy+2xz+2yz). \end{aligned}$$

Dessutom ska lådan ha en fix volym V, vilket betyder att

$$xyz = V.$$

Problemet kan alltså formuleras som

$$\begin{array}{ll} \min & 3xy+2xz+2yz, \\ \text{då} & \begin{cases} xyz = V, \\ x,y,z \ge 0. \end{cases} \end{array}$$

Från bivillkoret $xyz = V$ kan vi lösa ut $z = V/xy$ och problemet får formuleringen

$$\begin{array}{ll} \min & 3xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}, \\ \text{då} & x,y \ge 0. \end{array}$$

Sätt $f(x,y) = 3xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$. Minsta värdet av f antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter ($\nabla f = \mathbf{0}$),
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa fall.

1. De kritiska punkterna uppfyller
$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = (0,0), \qquad (*)$$
där
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - \frac{2V}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - \frac{2V}{y^2}.$$
$(*)$ ger ekvationssystemet
$$3x^2y - 2V = 0, \qquad (1)$$
$$3xy^2 - 2V = 0. \qquad (2)$$
Multiplicera (1) med y, (2) med x och ta differensen
$$-2Vy + 2Vx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y.$$
Detta insatt i (1) (eller (2)) ger
$$3y^3 - 2V = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \big(\tfrac{2}{3}V\big)^{1/3}.$$
En kritisk punkt är $\big((\tfrac{2}{3}V)^{1/3}, (\tfrac{2}{3}V)^{1/3}\big)$.
2. Gradienten ∇f existerar överallt utom då $x = 0$ eller $y = 0$.
3. Randpunkterna till området är linjerna $x = 0$ och $y = 0$. Eftersom området dessutom är obegränsat måste vi även betrakta fallet då $\|(x,y)\| \to \infty$, vilket i detta fall svarar mot $x \to \infty$ eller $y \to \infty$.

Funktionens minsta värde är något av följande värden

$$\begin{aligned} f\Big(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}V}, \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}V}\Big) &= 3\big(\tfrac{2}{3}V\big)^{2/3} + 4V\big(\tfrac{2}{3}V\big)^{-1/3}, \\ &= 2^{2/3}\cdot 3^{4/3}\cdot V^{2/3}, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x,y) &= \infty, \\ \lim_{y\to 0^+} f(x,y) &= \infty, \\ \lim_{x\to \infty} f(x,y) &= \infty, \\ \lim_{y\to \infty} f(x,y) &= \infty. \end{aligned}$$

Lådans dimensioner ska vara

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}V},$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{3}V},$$
$$z = \sqrt[3]{\frac{9}{4}V}.$$