Lektion 3, Flervariabelanalys den 20 januari 2000

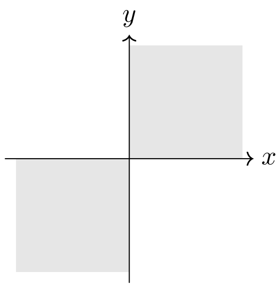
12.1.2 Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Funktionen är definierad i alla punkter där argumentet till kvadratroten är icke-negativ, d.v.s. där

$$xy \geq 0$$

vilket inträffar om x och $y \geq 0$ eller om x och $y \leq 0$. Definitionsmängden är alltså det gråfärgade området till höger.



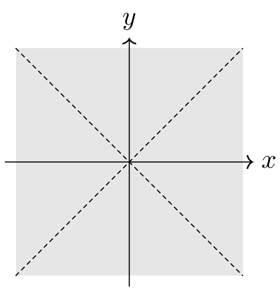
12.1.4 Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Denna rationella funktion är definierad överallt utom i punkter där nämnaren är noll, d.v.s. utom då

$$\begin{aligned} &x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &(x-y)(x+y) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &x = y \quad \text{eller} \quad x = -y. \end{aligned}$$

Alltså är funktionen definierad i hela talplanet utom i punkter på linjerna $x = y$ och $x = -y$. Streckade linjer betyder att de inte tillhör den gråfärgade definitionsmängden.



12.1.5 Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}.$$

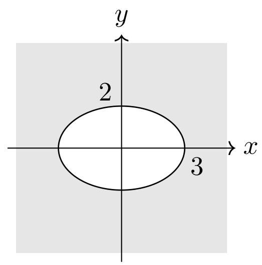
Funktionen är definierad i alla punkter där argumentet till kvadratroten är icke-negativ, d.v.s. där

$$4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0.$$

Denna olikhet kan vi skriva om i standardform

$$\tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \geq 1. \qquad (*)$$

Nu ser vi att de punkter som uppfyller $(*)$ är punkterna på och utanför ellipsen med mittpunkt i origo och halvaxlar 3 och 2.



Att ellipsen är heldragen betyder att den tillhör den gråfärgade definitionsmängden.

12.1.14 Skissera grafen till funktionen

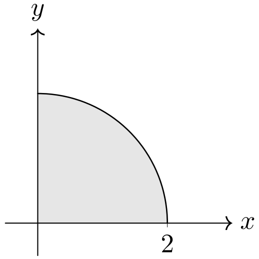
$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$$

i området $\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Låt oss först ta reda på hur området ser ut. De punkter som ingår i området måste uppfylla de tre villkoren

$$x^2 + y^2 \le 4, \tag{1}$$
$$x \ge 0, \tag{2}$$
$$y \ge 0. \tag{3}$$

Olikheterna (2) och (3) betyder att punkterna måste ligga i första kvadranten. Olikhet (1) betyder att punkterna dessutom måste ligga innanför eller på cirkeln med mittpunkt i origo och radie 2.

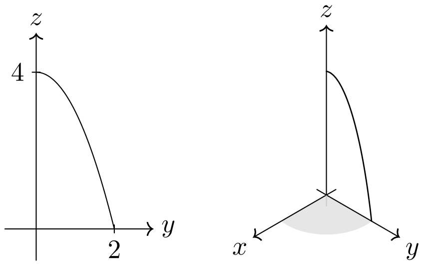


För att rita upp funktionsytan till f ska vi börja med att räkna ut funktionens värde längs randkurvorna till området.

$x = 0$: När vi rör oss längs y-axeln ($x = 0$) ges funktionsvärdena av uttrycket

$$z = f(0,y) = 4 - y^2$$

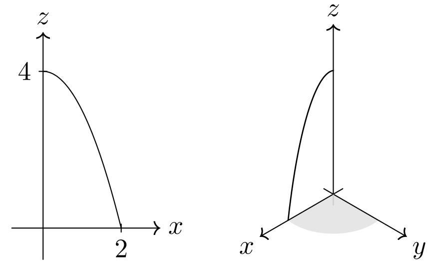
och om vi ritar upp hur z beror av y får vi kurvstycket nedan till vänster. Detta betyder att funktionsytan har detta parabelstycke som randkurva längs y-axeln.



$y = 0$: Längs x-axeln ($y = 0$) har funktionen utseendet

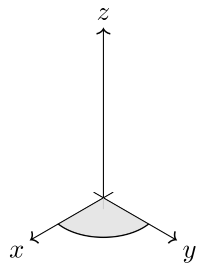
$$z = f(x,0) = 4 - x^2,$$

och grafen är en parabel. Funktionsytan har alltså detta kurvstycke som randkurva längs x-axeln.

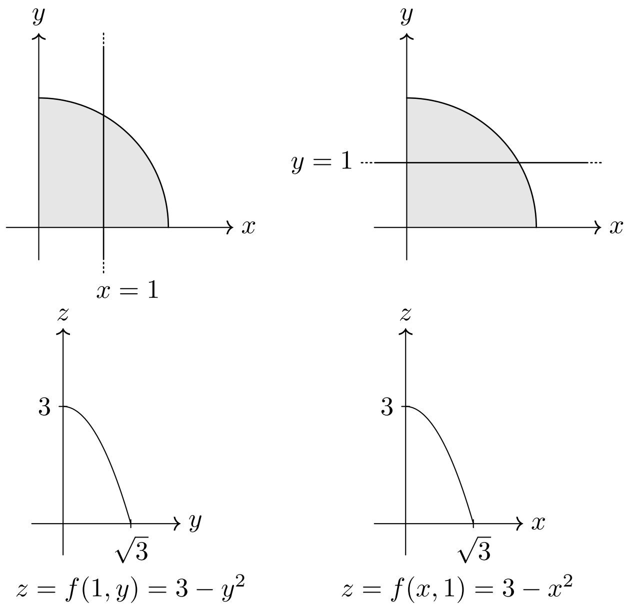


$x^2 + y^2$: När vi rör oss längs cirkelbågen är uttrycket $x^2 + y^2$ ($=$ avstånd^2 till origo) konstant lika med 4, så på denna cirkelbåge antar funktionen värdet

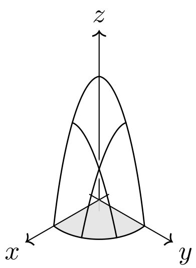
$$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2) = 0.$$



Vi har nu fått ett skelett till funktionsytan i och med att vi vet hur den ser ut längs randen av området. För att ytterligare underlätta ritandet av funktionsytan kan vi dessutom välja att undersöka hur funktionen ser ut längs några linjer som genomkorsar området.



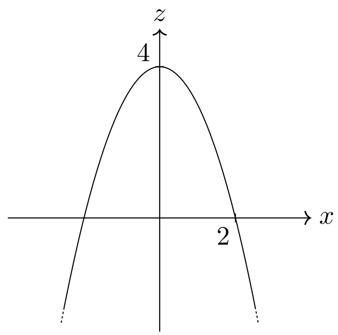
Ritar vi nu ut dessa stödlinjer tillsammans med randkurvorna får vi en figur som ganska väl låter oss ana funktionsytans utseende.



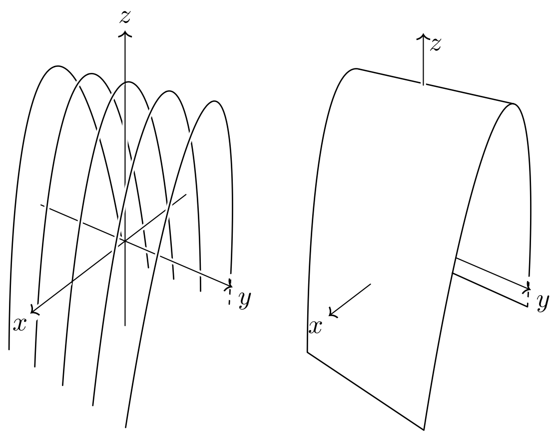
12.1.16 Skissera grafen till funktionen

$$f(x, y) = 4 - x^2.$$

Det första vi kan notera är att y inte förekommer i funktionsuttrycket. Det betyder att funktionen är oberoende av y. Vi kan därför undersöka funktionens värde längs en linje $y = C$ i x, y-planet och automatiskt få funktionens värde längs alla andra parallella linjer med olika C-värden. Ritar vi upp f:s värde längs $y = C$ får vi parabeln



och inritade i x, y, z-rummet får vi en kurvskara av parabler.



Funktionsytan genereras alltså av dessa parabler genom att parallellförflytta dem längs y-axeln.

12.1.20 Skissera några nivåkurvor till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2.$$

En nivåkurva består av alla punkter (x,y) som uppfyller sambandet

$$f(x,y) = C,$$

för något C. I vårt fall består alltså nivåkurvorna av kurvor i formen

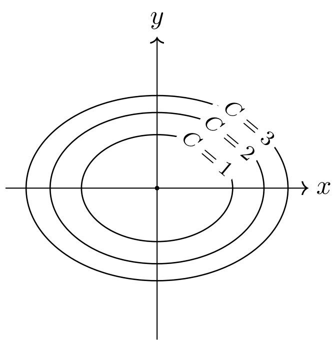
$$x^2 + 2y^2 = C. \qquad (*)$$

Eftersom VL alltid är icke-negativt måste $C \geq 0$ för att kurvan ska innehålla några punkter, och i fallet $C > 0$ kan vi skriva $(*)$ i standardformen

$$\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{C/2}}\right)^2 = 1.$$

Detta visar att nivåkurvorna består av ellipser med mittpunkt i origo och halvaxlar $\sqrt{C}$ och $\sqrt{C/2}$.

Om $C = 0$ ger $(*)$ att nivåkurvan endast består av punkten $(0,0)$.



12.1.22 Skissera några nivåkurvor till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

Nivåkurvorna är i formen

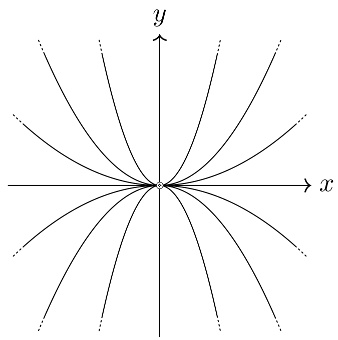
$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} = C. \qquad (*)$$

Om vi antar att $C \neq 0$ (och $y \neq 0$) då kan $(*)$ skrivas som

$$y = \frac{x^2}{C},$$

d.v.s. nivåkurvorna är parabler i x,y-planet.

Fallet $C = 0$ ger linjen $x = 0$ (med $y = 0$ borttagen).



Anm. I en omgivning av origo har funktionen ett komplicerat beteende med många olika funktionsvärden i mycket närliggande punkter.