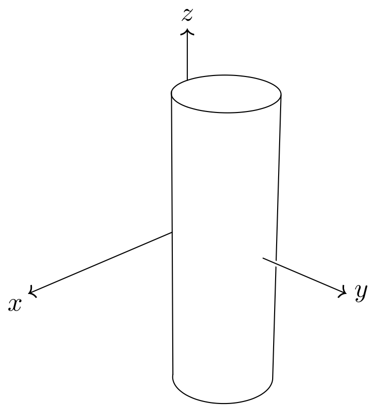
Lektion 15, Flervariabelanalys den 17 februari 2000

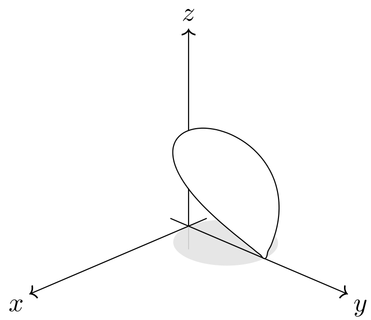
15.5.4 Bestäm arean av den del av sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$ som ligger innanför cylindern $x^2+y^2=2ay$.

Vi skriver om cylinderns ekvation i standardform

$$x^2+y^2-2ay=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+(y-a)^2=a^2.$$

Cylindern är alltså cirkulär med mittpunkt i $(x,y)=(0,a)$ och radie a. Sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$ har mittpunkt i origo och radie $2a$. Den del av sfären som är innanför cylindern består av två ytstycken.





Den övre ytan är funktionsytan

$$z=f(x,y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$$

över området $D: x^2+(y-a)^2\le a^2$. P.g.a. symmetrin är arean av det undre ytstycket lika med det övre ytstyckets area.

Eftersom sfären är 0-nivåytan till funktionen

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4a^2$$

ges areaelementet av

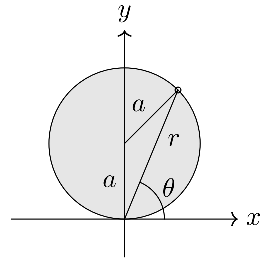
$$\begin{aligned} dS &= \left|\frac{\nabla f}{\partial f/\partial z}\right| dx\,dy = \frac{|(2x,2y,2z)|}{2z}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\,dx\,dy \\ &= \{\, z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Området D är en cirkeldisk och areaelementet innehåller bara x och y i kombinationen x^2+y^2 så vi inför polära koordinater,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Disken D beskrivs då som

$$\begin{aligned} &0\le\theta\le\pi, \\ &0\le r\le 2a\,\sin\theta. \end{aligned}$$



$$a^2=a^2+r^2-2ar\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$

Areaelementet blir

$$dS=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}}\,r\,dr\,d\theta=\frac{2ar}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr\,d\theta.$$

Arean av de två ytstyckena är

$$\begin{aligned} 2\iint_D dS &= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} \frac{2ar}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr = \{\, t=4a^2-r^2;\ dt=-2r\,dr\,\} \\ &= 2a\int_0^{\pi} d\theta \int_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 4a\int_0^{\pi} \big[\sqrt{s}\,\big]_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} = 8a\int_0^{\pi} \big(a-a|\cos\theta|\big)\,d\theta \\ &= 16a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,d\theta = 16a^2\Big[\,\theta-\sin\theta\,\Big]_0^{\pi/2} = 8a^2\pi-16a^2. \end{aligned}$$

15.5.14 Bestäm

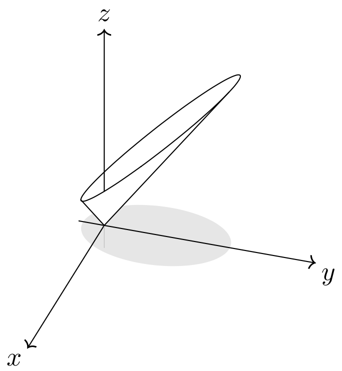
$$\iint_S y\,dS$$

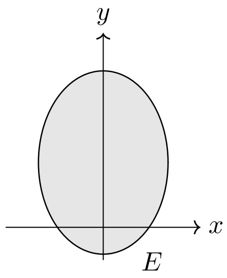
där S är den del av konen $z = \sqrt{2(x^2+y^2)}$ som ligger under planet $z = 1+y$.

En punkt (x,y,z) på konen ligger under planet om $z \le 1+y$, d.v.s. om

$$\begin{aligned}
z = \sqrt{2(x^2+y^2)} &\le 1+y &\quad\Leftrightarrow\quad& 2(x^2+y^2) \le (1+y)^2\\
\Leftrightarrow\quad 2x^2+y^2-2y &\le 1 &\quad\Leftrightarrow\quad& 2x^2+(y-1)^2 \le 2\\
\Leftrightarrow\quad x^2+\Bigl(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\Bigr)^2 &\le 1.
\end{aligned}$$

Punkterna på S är alltså de punkter med x- och y-koordinat innanför ellipsen E : $x^2+\bigl(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\bigr)^2 \le 1$.





Areaelementet i ytintegralen är

$$\begin{aligned}
dS &= \sqrt{1+\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x}\Bigr)^2+\Bigl(\frac{\partial z}{\partial y}\Bigr)^2}\;dx\,dy\\
&= \sqrt{1+\Bigl(\frac{4x}{2\sqrt{2(x^2+y^2)}}\Bigr)^2+\Bigl(\frac{4y}{2\sqrt{2(x^2+y^2)}}\Bigr)^2}\;dx\,dy\\
&= \sqrt{1+\frac{4x^2+4y^2}{2(x^2+y^2)}}\;dx\,dy = \sqrt{3}\;dx\,dy.
\end{aligned}$$

För att beskriva området innanför ellipsen på ett enkelt sätt gör vi koordinatbytet

$$\begin{aligned}
x &= r\,\cos\theta,\\
y &= 1+\sqrt{2}\,r\,\sin\theta,
\end{aligned}$$

(omskalade polära koordinater centrerade kring $(0,1)$). Området ges då av

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1,$$

och areaelementet är

$$\begin{aligned}
dS &= \sqrt{3}\;dx\,dy = \sqrt{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}\,dr\,d\theta = \sqrt{3}\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta\\ \sqrt{2}\,\sin\theta & \sqrt{2}\,r\cos\theta\end{vmatrix}\,dr\,d\theta\\
&= \sqrt{3}\,\bigl(\sqrt{2}\,r\cos^2\theta+\sqrt{2}\,r\sin^2\theta\bigr)\,dr\,d\theta = \sqrt{6}\,r\,dr\,d\theta.
\end{aligned}$$

Ytintegralen blir

$$\begin{aligned}
\iint_S y\,dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1+\sqrt{2}\,r\sin\theta)\,\sqrt{6}\,r\,dr\\
&= \sqrt{6}\int_0^{2\pi} d\theta\Bigl[\tfrac{1}{2}r^2-\tfrac{\sqrt{2}}{3}r^3\cos\theta\Bigr]_0^1 = \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\bigl(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{3}\cos\theta\bigr)\,d\theta = \sqrt{6}\,\pi.
\end{aligned}$$

15.5.15 Bestäm

$$\iint_S xz\,dS$$

där S är den del av ytan $z = x^2$ som ligger i första oktanten och innanför paraboloiden $z = 1-3x^2-y^2$.

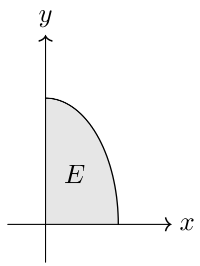
”Innanför paraboloiden” betyder i detta fall ”under paraboloiden”. Ytan $z = x^2$ ska alltså begränsas till området som uppfyller olikheterna

$$\begin{aligned}
z &\le 1-3x^2-y^2,\\
x &\ge 0,\\
y &\ge 0,\\
z &\ge 0.
\end{aligned}$$

Eftersom vi på ytan har att $z = x^2$ ger dessa olikheter att

$$\begin{aligned} x^2 &\le 1 - 3x^2 - y^2, \\ x &\ge 0, \\ y &\ge 0, \\ x^2 &\ge 0, \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \Big(\frac{x}{1/2}\Big)^2 + y^2 &\le 1, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

Projicerar vi alltså ner S på x, y-planet får vi en kvartsellips E med mittpunkt i origo och halvaxlar $\frac{1}{2}$ och 1.



Ytan S består därmed av de punkter på funktionsytan $z = x^2$ med x- och y-koordinater innanför området E.

Området E kan vi i kartesiska koordinater beskriva som

$$0 \le x \le \tfrac{1}{2}, \quad 0 \le y \le \sqrt{1 - 4x^2}.$$

Areaelementet är

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\, dx\, dy \\ &= \sqrt{1 + (2x)^2 + 0^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Ytintegralen blir

$$\begin{aligned} \iint_S xz\, dx\, dy &= \iint_S x \cdot x^2\, dS = \int_0^{1/2} x^3\, dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} \sqrt{1 + 4x^2}\; dy \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, \sqrt{1 - 4x^2}\; dx = \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1 - 16x^4}\; dx \\ &= \{\, t = 1 - 16x^4;\ dt = -64x^3\, dx \,\} = \tfrac{1}{64} \int_0^1 \sqrt{t}\; dt \\ &= \tfrac{1}{64} \Big[\tfrac{2}{3} t\sqrt{t} \Big]_0^1 = \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{96} \end{aligned}$$

15.6.2 Bestäm flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\, \boldsymbol{e}_x + y\, \boldsymbol{e}_y + z\, \boldsymbol{e}_z$$

ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

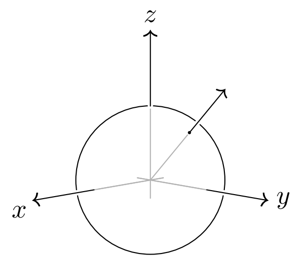
Sfären är 0-nivåytan till funktionen

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2,$$

och har det vektoriella ytelementet

$$d\boldsymbol{S} = \pm \frac{\nabla f}{\partial f / \partial z} = \pm \frac{(2x, 2y, 2z)}{2z}\, dx\, dy = \pm \frac{1}{z}(x, y, z)\, dx\, dy.$$

I den övre halvan av sfären väljer vi +:tecknet eftersom vi söker flödet ut ur sfären och $+\frac{1}{z}(x, y, z)$ pekar då ut ur sfären.



I den undre halvan måste vi välja −:tecknet.

Flödesintegralen blir

$$\begin{aligned} \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{\text{övre}} (x, y, z) \cdot \frac{1}{z}(x, y, z)\, dx\, dy \\ &\quad + \iint_{\text{undre}} (x, y, z) \cdot \frac{-1}{z}(x, y, z)\, dx\, dy \\ &= \iint_{\text{övre}} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\, dx\, dy - \iint_{\text{undre}} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\, dx\, dy \\ &= \iint_{\text{övre}} \frac{a^2}{z}\, dx\, dy - \iint_{\text{undre}} \frac{a^2}{z}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Den övre och undre halvan av S ges av

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{där } x^2 + y^2 \le a^2,$$

respektive

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{där } x^2 + y^2 \le a^2.$$

Flödesintegralen blir alltså

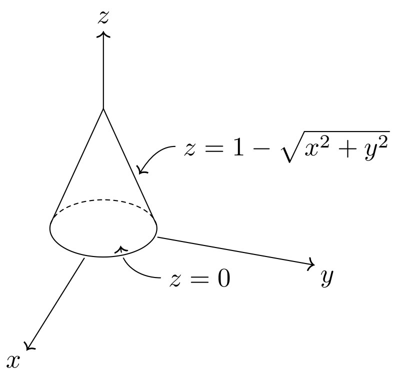
$$\begin{aligned}
\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= 2 \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \frac{a^2\, dx\, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \{\, \text{polära koordinater} \,\} \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr = \{\, t = a^2 - r^2;\ dt = -2r\, dr \,\} \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = a^2 \cdot 2\pi \cdot 2a = 4\pi a^3.
\end{aligned}$$

15.6.4 Bestäm flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\, \boldsymbol{e}_x + z\, \boldsymbol{e}_z$$

ut ut randytan till konen $0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Randytan till konen består dels av mantelytan $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \ge 0$, dels av undersidan $z = 0$.



Det vektoriella ytelementet på de två ytorna ges av

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\, dx\, dy = \pm\Big(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\Big)\, dx\, dy,$$

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\, dx\, dy = \pm(0, 0, -1)\, dx\, dy,$$

där vi i första formeln väljer $-$:tecknet och i andra formeln väljer $+$:tecknet, så att $d\boldsymbol{S}$ pekar ut från konen.

Flödet blir

$$\begin{aligned}
\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{\text{mantel}} (y, 0, z) \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big)\, dx\, dy \\
&\quad + \iint_{\text{under}} (y, 0, z) \cdot (0, 0, -1)\, dx\, dy \\
&= \iint_{\text{mantel}} \Big(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + z\Big)\, dx\, dy + \iint_{\text{under}} -z\, dx\, dy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \Big(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 - \sqrt{x^2+y^2}\Big)\, dx\, dy + \iint_{\text{under}} 0\, dx\, dy \\
&= \{\, \text{polära koordinater} \,\} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \Big(\frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r} + 1 - r\Big)\, r\, dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\tfrac{1}{3} r^3 \cos\theta \sin\theta + \tfrac{1}{2} r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\right]_0^1 \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{3} \cos\theta \sin\theta + \tfrac{1}{6}\big)\, d\theta = \tfrac{1}{3}\pi.
\end{aligned}$$

15.6.6 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = x\,\boldsymbol{e}_x + x\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$$

upp genom den del av ytan $z = x^2 - y^2$ innanför cylindern $x^2 + y^2 = a^2$.

Punkter innanför cylindern har x- och y-koordinater som uppfyller $x^2 + y^2 \le a^2$.
Eftersom $z = x^2 - y^2$ är en funktionsyta är

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm\big(2x, -2y, -1\big)\,dx\,dy$$

som pekar uppåt om vi väljer $-$:tecknet (z-koordinat positiv). Flödet genom ytan är

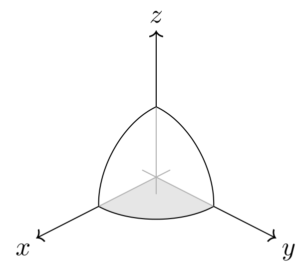
$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S (x,x,1)\cdot(-2x,2y,1)\,dx\,dy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le a^2} \big(-2x^2 + 2xy + 1\big)\,dx\,dy = \{\,\text{polära koordinater}\,\} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (-2r^2\cos^2\theta + 2r^2\cos\theta\sin\theta + 1)\,r\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\,\Big[-\tfrac{1}{2}r^4\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}r^4\cos\theta\sin\theta + \tfrac{1}{2}r^2\Big]_0^a \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(-\tfrac{1}{2}a^4\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}a^4\cos\theta\sin\theta + \tfrac{1}{2}a^2\Big)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(-\tfrac{1}{4}a^4 - \tfrac{1}{4}a^4\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}a^2\Big)\,d\theta \\
&= \{\,\text{integral av cos och sin över en hel period} = 0\,\} \\
&= -\tfrac{1}{4}a^4\cdot 2\pi + \tfrac{1}{2}a^2\cdot 2\pi = \pi a^2\big(1 - \tfrac{1}{2}a^2\big).
\end{aligned}$$

15.6.8 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = z^2\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ som ligger i första oktanten.

I första oktanten $x, y, z \ge 0$ är sfären en funktionsyta $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ över kvartsdisken $D: x^2 + y^2 \le a^2,\ x, y \ge 0$.



Det vektoriella ytelementet är

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm\Big(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, -1\Big)\,dx\,dy$$

och väljer vi $-$:tecknet pekar $d\boldsymbol{S}$ uppåt. Flödet blir

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S (0,0,z^2)\cdot\Big(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1\Big)\,dx\,dy \\
&= \iint_S z^2\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le a^2} (a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy \\
&= \{\,\text{polära koordinater}\,\} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2)\,r\,dr \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta\,\Big[\tfrac{1}{2}a^2r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^a = \int_0^{\pi/2}\big(\tfrac{1}{2}a^4 - \tfrac{1}{4}a^4\big)\,d\theta = \frac{\pi a^4}{8}.
\end{aligned}$$

15.6.10 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = 2x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom ytan

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = u^2 v\,\boldsymbol{e}_x + uv^2\,\boldsymbol{e}_y + v^3\,\boldsymbol{e}_z \qquad (0 \leq u, v \leq 1).$$

Eftersom ytan är parametriserad ges ytelementet av

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= \pm \frac{d\boldsymbol{r}}{du} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dv}\,du\,dv = \pm(2uv, v^2, 0) \times (u^2, 2uv, 3v^2)\,du\,dv \\ &= \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2uv & v^2 & 0 \\ u^2 & 2uv & 3v^2 \end{vmatrix} du\,dv = (3v^4, -6uv^3, 3u^2v^2)\,du\,dv, \end{aligned}$$

där vi väljer +:tecknet så att $d\boldsymbol{S}$ pekar uppåt. Flödet är

$$\begin{aligned} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S (2x, y, z) \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint_S (2u^2v, uv^2, v^3) \cdot (3v^4, -6uv^3, 3u^2v^2)\,du\,dv \\ &= \iint_S (6u^2v^5 - 6u^2v^5 + 3u^2v^5)\,du\,dv \\ &= 3\int_0^1 u^2\,du \int_0^1 v^5\,dv = 3 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

15.6.12 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = yz\,\boldsymbol{e}_x - xz\,\boldsymbol{e}_y + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom ytan

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = e^u \cos v\,\boldsymbol{e}_x + e^u \sin v\,\boldsymbol{e}_y + u\,\boldsymbol{e}_z$$

där $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq \pi$.

Ytelementet ges av

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= \pm \frac{d\boldsymbol{r}}{du} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dv}\,du\,dv = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ e^u \cos v & e^u \sin v & 1 \\ -e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \end{vmatrix} du\,dv \\ &= \pm(-e^u \cos v, -e^u \sin v, e^{2u})\,du\,dv. \end{aligned}$$

Med +:tecken pekar $d\boldsymbol{S}$ uppåt. Flödet är

$$\begin{aligned} \iint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint (yz, -xz, x^2 + y^2) \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint (ue^u \sin v, -ue^u \cos v, e^{2u}) \cdot (-e^u \cos v, -e^u \sin v, e^{2u})\,du\,dv \\ &= \iint (0 + e^{4u})\,du\,dv = \int_0^1 e^{4u}\,du \int_0^\pi dv = \tfrac{1}{4}(e^4 - 1)\pi. \end{aligned}$$