Flervariabelanalys CSMH1

Översikt föreläsningar modul 3

Denna modul 3 ägnas nästan uteslutande åt problemet att hitta största och minsta värden till en funktion av flera variabler.
Vi kommer att studera tre olika situationer, var och en krävande sitt speciella angreppssätt.

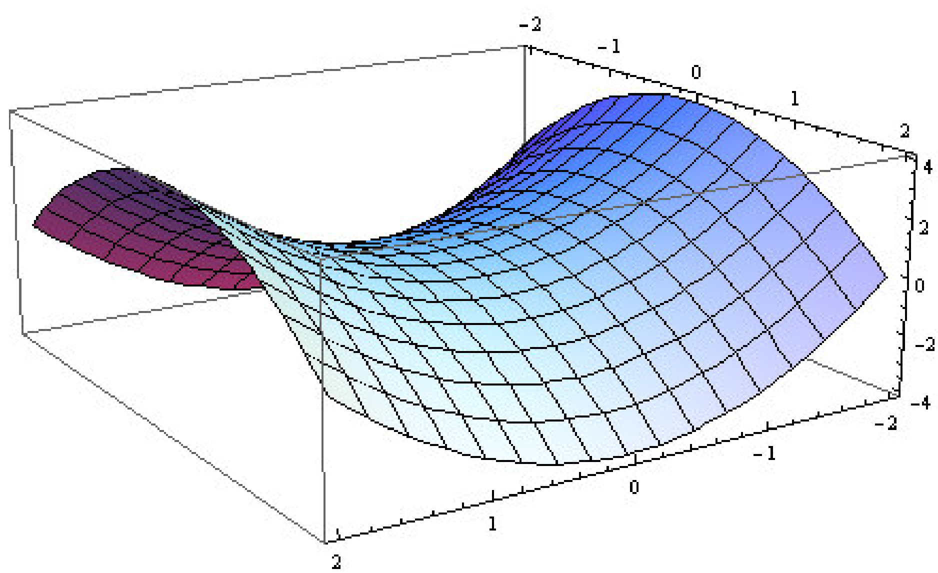
1) **Lokala max och min**
2) **Max och min på kompakta mängder**
3) **Max och min med bivillkor**

För funktioner av en variabel brukar man som bekant lösa ekvationen $f'(x)=0$ för att hitta punkter där $f(x)$ eventuellt har ett extremvärde.
Motsvarigheten för en funktion av två variabler, $f(x,y)$, är att man löser

Ekvationssystemet $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$.

En lösning till ett sådant system kallas för ***stationär punkt***.

En stationär punkt ***kan*** vara ett lokalt maximum eller minimum, men också en så kallad ***sadelpunkt***, som är varken eller. Ett typexempel på en sadelpunkt är origo till funktionen $f(x,y)=x^2-y^2$.



Lokala max och min *Adams 13.1*

Vi kommer under modul3 första föreläsning reda ut hur man hittar lokala extremvärden till en funktion av flera variabler (i de flesta fall två), vilket i stor utsträckning går ut på att söka upp stationära punkter och bestämma karaktären hos dessa.

Grunden för denna process läggs i avsnittet om Taylorutvecklingar, ett begrepp som naturligtvis även har många andra användningsområden.

Karaktären av en stationär punkt avgörs av de tre andraderivatorna på följande vis:

Låt $\begin{cases} A = f''_{xx} \\ B = f''_{xy} \\ C = f''_{yy} \end{cases}$ och inför den kvadratiska formen $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$.

Nu gäller (i stort) att
om $Q < 0$ har vi ett lokalt maximum.
om $Q > 0$ har vi ett lokalt minimum.
om Q antar både positiva och negativa värden har vi en sadelpunkt.

Exempel: bestäm alla lokala extremvärden till $f(x,y) = (x^2 + 2y)e^{\frac{y}{2}}$

Lösning: vi bestämmer först stationära punkter genom att lösa

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xe^{\frac{y}{2}} & = & 0 \\ 2e^{\frac{y}{2}} + \frac{1}{2}(x^2 + 2y)e^{\frac{y}{2}} & = & 0 \end{cases}$$

Ur den övre ekvationen får vi att x måste vara $= 0$; det använder vi i den nedre ekvationen och får att y måste vara $= -2$.

Den enda stationära punkten är alltså $(x,y) = (0,-2)$

Anmärkning: bestämning av stationära punkter leder till ett ekvationssystem som nästan alltid är olinjärt. Det finns ingen universell metod att lösa sådana, och i många fall är de mycket svåra. Man lyckas dock ofta genom att faktorisera de ingående uttrycken.

Vi bestämmer sedan andraderivatorna:

$$\begin{cases} A & = & f''_{xx} & = & 2e^{\frac{y}{2}} \\ B & = & f''_{xy} & = & xe^{\frac{y}{2}} \\ C & = & f''_{yy} & = & \left(2 + \frac{x^2}{4} + \frac{y}{2}\right)e^{\frac{y}{2}} \end{cases} \quad \text{I } (x,y) = (0,-2) \text{ blir } \begin{cases} A & = & 2e^{-1} \\ B & = & 0 \\ C & = & e^{-1} \end{cases}$$

Alltså blir $Q(h,k) = (2h^2 + k^2)e^{-1}$ som uppenbarligen är > 0.
Punkten $(x,y) = (0,-2)$ är följaktligen ett lokalt minimum.

Max och min över kompakta områden ***Adams 13.2***

Ibland ställs man inför problemet att hitta ett största eller minsta värde för en funktion över ett specifikt område. Exempel: hur stort kan $x+2y$ bli om $x^2+y^2 \le 1$?

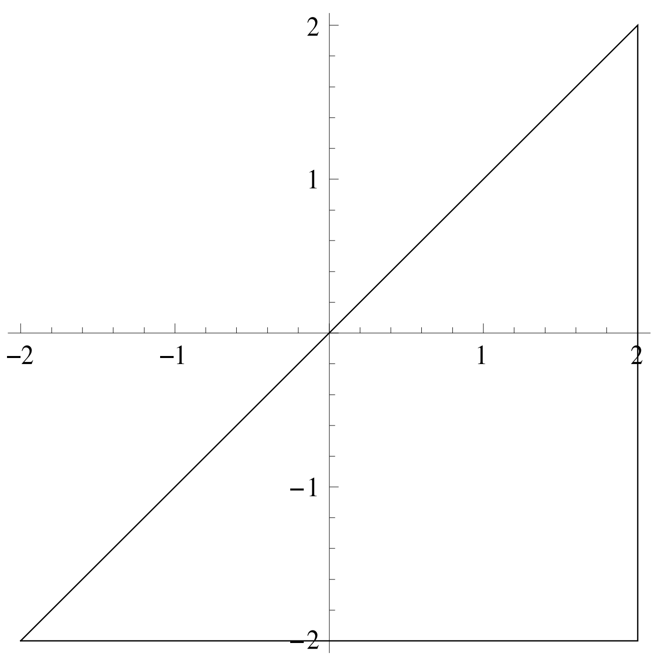
Om det angivna området är kompakt, dvs slutet och begränsat, underlättas undersökningen, ty då vet man från början att ett största eller minsta värde existerar, och man kan också ganska väl beskriva var man skall leta.

Problemet är alltså: sök största och minsta värde för $f(x,y)$ på det kompakta området D. En punkt där ett sådant max eller min antas måste vara

a) en stationär punkt i det inre av D.
b) en randpunkt till D.
c) en hörnpunkt till D.

Efter hand får man en växande lista av ”kandidater” till max och min, och när listan är klar behöver man bara jämföra funktionsvärdena. Det är alltså inte nödvändigt att för varje punkt reda ut huruvida man hittat ett lokalt extremvärde och om det i så fall är max eller min, vilket förkortar arbetet avsevärt.

Exempel: Bestäm största och minsta värde till $f(x,y)=y^2+(x^2-1)y$ på triangeln med hörn i $(2,2)$, $(-2,-2)$ samt $(2,-2)$



Lösning: Vi kallar triangeln för D och söker först stationära punkter i det inre av D.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy &= 0 \\ 2y + x^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

Vi får två fall, beroende på om x eller y är $=0$.
$x=0$ i den nedre ekvationen ger $y=\frac{1}{2}$
$y=0$ i den nedre ekvationen ger $x=\pm 1$.
Så vi har tre stationära punkter men bara en, $(x,y)=(1,0)$, ligger i D.

Därefter betraktar vi randen av D. Denna delas upp i triangelns tre sidor.

Vi studerar sidan längs den sneda linjen $x=y$:
Sätt $h(x)=f(x,x)=x^3+x^2-x$; vi söker lösningar till $h'(x)=0$ i intervallet $-2<x<2$.
$h'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$
Detta ger oss två punkter, $(x,y)=(-1,-1)$ respektive $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
Man studerar sedan de två övriga två sidorna där man på samma sätt hittar punkterna $(x,y)=(0,-2)$ respektive $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$
Till sitt gör man en lista med de funna punkterna, tillsammans med tre hörnpunkter:

$$\begin{aligned}
f(1,0) &= 0\\
f(-1,-1) &= 1\\
f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) &= -\frac{5}{27}\\
f(0,-2) &= 6\\
f\left(2,-\frac{3}{2}\right) &= -\frac{9}{4}\\
f(-2,-2) &= -2\\
f(2,-2) &= -2\\
f(2,2) &= 10
\end{aligned}$$

Svar: största värde är 10, minsta värde är $-\frac{9}{4}$

Om området inte är kompakt blir undersökningen genast svårare, men man kan ibland genom att betrakta den aktuella funktionen ändå dra de slutsatser som krävs.

Exempel: har $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ något största eller minsta värde i $\Re^2$?

Lösning: området är inte kompakt eftersom det är obegränsat. Emellertid ser vi på funktionen att $0<f(x,y)\le 1$ (negativ exponent), att $f(0,0)=1$, samt att $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y)=0$.
Vi kan alltså dra slutsatsen att $f(x,y)$ har ett största värde $=1$, men att minsta värde saknas.

Max och min med bivillkor *Adams 13.3*

Det tredje och sista fallet vi studerar kallas optimering med bivillkor. Här letar man efter största och minsta värde av en funktion på en mängd som i tvåvariabelfallet ofta utgörs av en kurva och i trevariabelfallet av en yta. Man kan till exempel fråga sig hur stort $x+2y$ kan bli om det gäller att $x^2+xy+y^2=1$.

Bivillkoret kommer att beskrivas av en eller flera ekvationer av typen $g(x,y)=0$. Man kan visa att under rimliga förutsättningar kommer max och min att antas i en punkt där gradienterna är parallella.

Exempel: Bestäm största och minsta värde till $f(x,y,z)=8x-4z$ om $x^2+10y^2+z^2=5$.

Lösning: Sätt $g(x,y,z)=x^2+10y^2+z^2$. Bivillkoret kan alltså skrivas $g=5$ och bildar här ett kompakt område (en ellipsoid), och största och minsta värde kommer att antas i punkter där $grad\ f\ //\ grad\ g$.

Vi skriver $grad\ g=\lambda(grad\ f)$ och får följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x &= 8\lambda \\ 20y &= 0 \\ 2z &= -4\lambda \\ x^2+10y^2+z^2 &= 5 \end{cases}$$

Vid lösningen av ett sådant system vill man gärna eliminera λ vars värde sällan är intressant.

Ur de tre första ekvationerna får vi att $y=0,\quad x=-2z$; det sätter vi in i den sista: $4z^2+z^2=5 \quad\Rightarrow\quad z^2=1$ och hittar på detta vis två punkter, $\pm(2,0,-1)$

Svar: största värde är $f(2,0,-1)=20$, minsta värde är $f(-2,0,1)=-20$