Identiska partiklar

(slump — logik — topologi — vardag — existens)

Douglas Lundholm
UU Matematik

Matematikseminariet, 10 mars 2021

$0 \to \infty \to$ 

Slump: singla slant!

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:		

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:				
slant 1:				
slant 2:				
Sannolikhet:				

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:				
slant 1:	krona			
slant 2:	krona			
Sannolikhet:				

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:			
slant 1:	krona	klave	
slant 2:	krona	krona	
Sannolikhet:			

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:			
slant 1:	krona	klave	krona
slant 2:	krona	krona	klave
Sannolikhet:			

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:				
slant 1:	krona	klave	krona	klave
slant 2:	krona	krona	klave	klave
Sannolikhet:				

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:				
slant 1:	krona	klave	krona	klave
slant 2:	krona	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:

slant 1:	krona	klave	krona	klave
slant 2:	krona	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Slantarna må vara ganska lika, men **särskiljbara**!

Slump: singla slant!

krona / klave — slumpa och gör statistik!

En slant:

Möjliga utfall:	krona	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Två slantar:

Möjliga utfall:				
slant 1:	krona	klave	krona	klave
slant 2:	krona	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Slantarna må vara ganska lika, men **särskiljbara**!
Kolla riktigt noga!

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då?

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Två LOGISKT IDENTISKA slantar:

Möjliga utfall:

ena slanten:	krona	klave	krona	klave
andra slanten:	krona	krona	klave	klave
Sannolikhet:				

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Två LOGISKT IDENTISKA slantar:

Möjliga utfall:

ena slanten:	krona	klave	krona	klave
andra slanten:	krona	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Två LOGISKT IDENTISKA slantar:

Möjliga utfall:

ena slanten:	krona	$\begin{pmatrix}\text{klave}\\ \text{krona}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\text{krona}\\ \text{klave}\end{pmatrix}$	klave
andra slanten:	krona		klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Två LOGISKT IDENTISKA slantar:

Möjliga utfall:

ena slanten:	krona	krona	klave
andra slanten:	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Två LOGISKT IDENTISKA slantar:

Möjliga utfall:

ena slanten:	krona	krona	klave
andra slanten:	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Vi ser inte detta i experimentet — men vi borde ha sett det om de faktiskt var helt identiska!

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Två LOGISKT IDENTISKA slantar:

Möjliga utfall:

ena slanten:	krona	krona	klave
andra slanten:	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Vi ser inte detta i experimentet — men vi borde ha sett det om de faktiskt var helt identiska!
Omöjligt att få till med vanliga slantar i rumstemperatur...

Slump: singla slant!

Om vi inte tittar så noga på slantarna då? Fortfarande samma...

Två LOGISKT IDENTISKA slantar:

Möjliga utfall:

ena slanten:	krona	krona	klave
andra slanten:	krona	klave	klave
Sannolikhet:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Vi ser inte detta i experimentet — men vi borde ha sett det om de faktiskt var helt identiska!
Omöjligt att få till med vanliga slantar i rumstemperatur...

Men:
I den **kvantmekaniska världen** kan faktiskt *partiklar* bete sig så!

Kvantmekaniska "slantar"

Kvantmekaniska partiklar kan dessutom vara flera saker samtidigt, i **sannolikhetsfördelning** (ex. Schrödingers katt...)

Kvantmekaniska “slantar”

Kvantmekaniska partiklar kan dessutom vara flera saker samtidigt, i **sannolikhetsfördelning** (ex. Schrödingers katt...)

Två *särskiljbara* partiklar i tillstånden 0 eller 1 (krona / klave):

Kvantmekaniska "slantar"

Kvantmekaniska partiklar kan dessutom vara flera saker samtidigt, i **sannolikhetsfördelning** (ex. Schrödingers katt...)

Två *särskiljbara* partiklar i tillstånden 0 eller 1 (krona / klave):

Tillstånd: Sannolikhetsfördeling:

$$\begin{array}{c} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array} \quad \stackrel{P}{\longmapsto} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array} \text{ eller } \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \text{ eller } \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

(okänt) (säkert) (..)

Kvantmekaniska "slantar"

Kvantmekaniska partiklar kan dessutom vara flera saker samtidigt, i **sannolikhetsfördelning** (ex. Schrödingers katt...)

Två *särskiljbara* partiklar i tillstånden 0 eller 1 (krona / klave):

Tillstånd: Sannolikhetsfördeling:

$$\begin{array}{c} (0,0) \\ (0,1) \\ (1,0) \\ (1,1) \end{array} \quad \stackrel{P}{\longmapsto} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \text{(okänt)} \end{array} \quad \text{eller} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \text{(säkert)} \end{array} \quad \text{eller} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ (..) \end{array}$$

Rummet av tillstånd / konfigurationsrummet:

$$X = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$$

Sannolikhetsfördelning: $P : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$

Kvantmekaniska "slantar"

Två **identiska** partiklar i tillstånden 0 eller 1:

Kvantmekaniska "slantar"

Två **identiska** partiklar i tillstånden 0 eller 1:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Tillstånd:} & \text{Sannolikhetsfördelning:} & & & & & \\ (0,0) & & \frac{1}{3} & & 1 & & \frac{1}{2} \\ (0,1) \sim (1,0) & \overset{P}{\longmapsto} & \frac{1}{3} & \text{eller} & 0 & \text{eller} & \frac{1}{2} \\ (1,1) & & \frac{1}{3} & & 0 & & 0 \\ & & \text{(okänt)} & & & & \end{array}$$

Kvantmekaniska "slantar"

Två **identiska** partiklar i tillstånden 0 eller 1:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{Tillstånd:} & & \text{Sannolikhetsfördelning:} & & & & \\
(0,0) & & \frac{1}{3} & & 1 & & \frac{1}{2} \\
(0,1) \sim (1,0) & \overset{P}{\longmapsto} & \frac{1}{3} & \text{eller} & 0 & \text{eller} & \frac{1}{2} \\
(1,1) & & \frac{1}{3} & & 0 & & 0 \\
 & & \text{(okänt)} & & & &
\end{array}
$$

Rummet av tillstånd / konfigurationsrummet:

$$X = \{(0,0),\ (0,1) \sim (1,0),\ (1,1)\}$$

Kvantmekaniska "slantar"

Två **identiska** partiklar i tillstånden 0 eller 1:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Tillstånd:} & & \text{Sannolikhetsfördeling:} & & & & \\ (0,0) & & \frac{1}{3} & & 1 & & \frac{1}{2} \\ (0,1)\sim(1,0) & \xmapsto{P} & \frac{1}{3} & \text{eller} & 0 & \text{eller} & \frac{1}{2} \\ (1,1) & & \frac{1}{3} & & 0 & & 0 \\ & & \text{(okänt)} & & & & \end{array}$$

Rummet av tillstånd / konfigurationsrummet:

$$X = \{(0,0),\ (0,1)\sim(1,0),\ (1,1)\}$$

Sannolikhetsfördelning: $\quad P : X \to [0,1], \quad P(0,1) = P(1,0)$

Kvantmekaniska "slantar"

Två **identiska** partiklar i tillstånden 0 eller 1:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Tillstånd:} & & \text{Sannolikhetsfördeling:} & & & & \\ (0,0) & & \frac{1}{3} & & 1 & & \frac{1}{2} \\ (0,1)\sim(1,0) & \xmapsto{P} & \frac{1}{3} & \text{eller} & 0 & \text{eller} & \frac{1}{2} \\ (1,1) & & \frac{1}{3} & & 0 & & 0 \\ & & \text{(okänt)} & & & & \end{array}$$

Rummet av tillstånd / konfigurationsrummet:

$$X = \{(0,0),\ (0,1)\sim(1,0),\ (1,1)\}$$

Sannolikhetsfördelning: $P : X \to [0,1], \quad P(0,1) = P(1,0)$

— Beskrivs egentligen allmänt av en så-kallad **vågfunktion**:

$$\Psi : X \to \mathbb{C} \quad \text{där} \quad P(x) = |\Psi(x)|^2$$

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Tillståndsrum: Kontinuum av tillstånd för varje partikel:

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Tillståndsrum: Kontinuum av tillstånd för varje partikel:

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Sannolikhets*täthet*:

$$\begin{array}{rcl} X_{\text{sär}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (x_1, x_2) & \mapsto & P(x_1, x_2) \in [0,1] \end{array}$$

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Tillståndsrum: Kontinuum av tillstånd för varje partikel:

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Sannolikhets*täthet*:

$$\begin{array}{rcl} X_{\text{sär}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (x_1, x_2) & \mapsto & P(x_1, x_2) \in [0,1] \end{array}$$

Två **identiska** kvantmekaniska partiklar på en linje.

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Tillståndsrum: Kontinuum av tillstånd för varje partikel:

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Sannolikhets*täthet*:

$$\begin{array}{rcl} X_{\text{sär}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (x_1, x_2) & \mapsto & P(x_1, x_2) \in [0,1] \end{array}$$

Två **identiska** kvantmekaniska partiklar på en linje.

Identiska: $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_1)$, speciellt: $P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Tillståndsrum: Kontinuum av tillstånd för varje partikel:

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Sannolikhets*täthet*:

$$\begin{array}{rcl} X_{\text{sär}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (x_1, x_2) & \mapsto & P(x_1, x_2) \in [0,1] \end{array}$$

Två **identiska** kvantmekaniska partiklar på en linje.

Identiska: $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_1)$, speciellt: $P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$

Kan istället tänka på 2-punktsmängder: $\{x_1, x_2\}$ (glömt ordningen)

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Tillståndsrum: Kontinuum av tillstånd för varje partikel:

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Sannolikhets*täthet*:

$$\begin{array}{rcl} X_{\text{sär}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (x_1, x_2) & \mapsto & P(x_1, x_2) \in [0,1] \end{array}$$

Två **identiska** kvantmekaniska partiklar på en linje.

Identiska: $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_1)$, speciellt: $P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$

Kan istället tänka på 2-punktsmängder: $\{x_1, x_2\}$ (glömt ordningen)

Knepigt om de är på samma ställe! En partikel? Två?

Kvantmekaniska partiklar på en linje

Två **särskiljbara** kvantmekaniska partiklar på en linje $\mathbb{R}$.

Tillståndsrum: Kontinuum av tillstånd för varje partikel:

$$x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Sannolikhets*täthet*:

$$\begin{array}{rcl} X_{\text{sär}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (x_1, x_2) & \mapsto & P(x_1, x_2) \in [0,1] \end{array}$$

Två **identiska** kvantmekaniska partiklar på en linje.

Identiska: $(x_1, x_2) \sim (x_2, x_1)$, speciellt: $P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$

Kan istället tänka på 2-punktsmängder: $\{x_1, x_2\}$ (glömt ordningen)

Knepigt om de är på samma ställe! En partikel? Två?

Ta bort det fallet:

$$X_{\text{id}} = \{\{x_1, x_2\} : x_1 \neq x_2\} = \{\text{2-punktsdelmängder av } \mathbb{R}\}$$

Kvantmekaniska partiklar i rummet

Två kvantmekaniska partiklar i rummet $\mathbb{R}^3$.

Kvantmekaniska partiklar i rummet

Två kvantmekaniska partiklar i rummet $\mathbb{R}^3$.

Särskiljbara:

$$\begin{array}{ccc} X_{\text{sär}} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6 & \stackrel{P}{\to} & [0,1] \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto & P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{array}$$

Kvantmekaniska partiklar i rummet

Två kvantmekaniska partiklar i rummet $\mathbb{R}^3$.

Särskiljbara:

$$\begin{array}{ccc} X_{\text{sär}} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6 & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto & P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{array}$$

Identiska: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sim (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$

Kvantmekaniska partiklar i rummet

Två kvantmekaniska partiklar i rummet $\mathbb{R}^3$.

Särskiljbara:

$$\begin{array}{rcl} X_{\text{sär}} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6 & \xrightarrow{P} & [0,1] \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto & P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{array}$$

Identiska: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sim (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \Rightarrow$

$$X_{\text{id}} = \{\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} : \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2\} = \{\text{2-punktsdelmängder av } \mathbb{R}^3\}$$

eller

$$P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = P(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

Identiska partiklar i rummet

Det visar sig finnas **TVÅ** olika typer av identiska partiklar i rummet:

Identiska partiklar i rummet

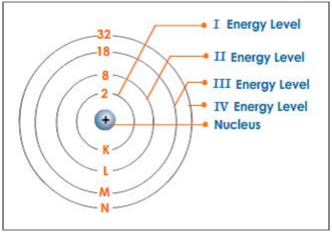
Det visar sig finnas **TVÅ** olika typer av identiska partiklar i rummet:

- **bosoner** — ex ljuspartiklar (fotoner) $\rightarrow$ laser

Identiska partiklar i rummet

Det visar sig finnas **TVÅ** olika typer av identiska partiklar i rummet:

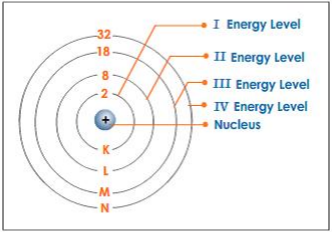
- **bosoner** — ex ljuspartiklar (fotoner) $\rightarrow$ laser
- **fermioner** — ex elektroner/protoner $\rightarrow$ materia



Identiska partiklar i rummet

Det visar sig finnas **TVÅ** olika typer av identiska partiklar i rummet:

- **bosoner** — ex ljuspartiklar (fotoner) → laser
- **fermioner** — ex elektroner/protoner → materia

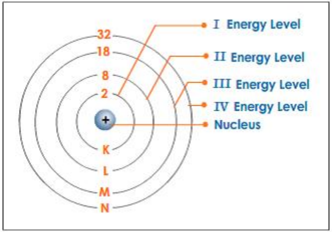


För att förstå detta krävs:

Identiska partiklar i rummet

Det visar sig finnas **TVÅ** olika typer av identiska partiklar i rummet:

- **bosoner** — ex ljuspartiklar (fotoner) $\to$ laser
- **fermioner** — ex elektroner/protoner $\to$ materia



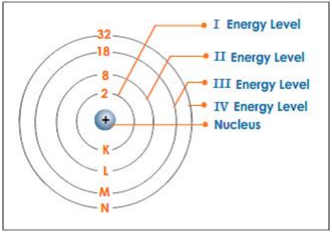
För att förstå detta krävs:

- ersätta sannolikhetsfördelningen P med vågfunktionen Ψ

Identiska partiklar i rummet

Det visar sig finnas **TVÅ** olika typer av identiska partiklar i rummet:

- **bosoner** — ex ljuspartiklar (fotoner) $\rightarrow$ laser
- **fermioner** — ex elektroner/protoner $\rightarrow$ materia



För att förstå detta krävs:

- ersätta sannolikhetsfördelningen P med vågfunktionen Ψ
- betrakta rummets **TOPOLOGI**

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Betrakta först en kontinuerlig utväxling av **en** partikel i rummet.

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Betrakta först en kontinuerlig utväxling av **en** partikel i rummet.
$\Rightarrow$ Loopar i $\mathbb{R}^3$.

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Betrakta först en kontinuerlig utväxling av **en** partikel i rummet.
$\Rightarrow$ Loopar i $\mathbb{R}^3$.

Betrakta sedan en kontinuerlig utväxling av **två** partiklar i rummet.

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Betrakta först en kontinuerlig utväxling av **en** partikel i rummet.
$\Rightarrow$ Loopar i $\mathbb{R}^3$.

Betrakta sedan en kontinuerlig utväxling av **två** partiklar i rummet.

$$\begin{array}{rcccccl} X_{\text{sär}} \ni & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto & (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') & \mapsto & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \neq (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ X_{\text{id}} \ni & \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2'\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \end{array}$$

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Betrakta först en kontinuerlig utväxling av **en** partikel i rummet.
$\Rightarrow$ Loopar i $\mathbb{R}^3$.

Betrakta sedan en kontinuerlig utväxling av **två** partiklar i rummet.

$$\begin{array}{rcccccl} X_{\text{sär}} \ni & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto & (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') & \mapsto & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \neq (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ X_{\text{id}} \ni & \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2'\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Loopar i X_{id}.

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Betrakta först en kontinuerlig utväxling av **en** partikel i rummet.
$\Rightarrow$ Loopar i $\mathbb{R}^3$.

Betrakta sedan en kontinuerlig utväxling av **två** partiklar i rummet.

$$\begin{array}{rcccccl} X_{\text{sär}} \ni & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto & (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') & \mapsto & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & \neq (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ X_{\text{id}} \ni & \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2'\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\} & = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Loopar i X_{id}.

Sätt för enkelhets skull mass-centrum i origo och betrakta vektorn

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sim (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ säger då att $\mathbf{r} \sim -\mathbf{r}$

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Betrakta först en kontinuerlig utväxling av **en** partikel i rummet.
$\Rightarrow$ Loopar i $\mathbb{R}^3$.

Betrakta sedan en kontinuerlig utväxling av **två** partiklar i rummet.

$$\begin{array}{rcccccl} X_{\text{sär}} \ni & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \mapsto & (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') & \mapsto & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \neq (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ X_{\text{id}} \ni & \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2'\} & \mapsto & \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Loopar i X_{id}.

Sätt för enkelhets skull mass-centrum i origo och betrakta vektorn

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sim (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ säger då att $\mathbf{r} \sim -\mathbf{r}$
Fixera för enkelhets skull även avståndet, t.ex. $|\mathbf{r}| = 1 \;\Rightarrow X_{\text{red}}$

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Sammanfattning:
För att studera kontinuerliga utväxlingar av **två** partiklar i $\mathbb{R}^3$ kan vi alltså i princip reducera till studiet av kontinuerliga utväxlingar av **en** "partikel" $\mathbf{r}$ som rör sig i mängden

$$X_{\text{red}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| = 1 \text{ och } \mathbf{r} \sim -\mathbf{r}\},$$

d.v.s. loopar i X_{red} (tekniskt $= \mathbb{R}P^2$, projektiva planet).

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Sammanfattning:
För att studera kontinuerliga utväxlingar av **två** partiklar i $\mathbb{R}^3$ kan vi alltså i princip reducera till studiet av kontinuerliga utväxlingar av **en** "partikel" $\mathbf{r}$ som rör sig i mängden

$$X_{\mathrm{red}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| = 1 \text{ och } \mathbf{r} \sim -\mathbf{r}\},$$

d.v.s. loopar i X_{red} (tekniskt $= \mathbb{R}P^2$, projektiva planet).

Vi är intresserade av **icke-triviala** utväxlingar:

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Sammanfattning:
För att studera kontinuerliga utväxlingar av **två** partiklar i $\mathbb{R}^3$ kan vi alltså i princip reducera till studiet av kontinuerliga utväxlingar av **en** "partikel" $\mathbf{r}$ som rör sig i mängden

$$X_{\text{red}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| = 1 \text{ och } \mathbf{r} \sim -\mathbf{r}\},$$

d.v.s. loopar i X_{red} (tekniskt $= \mathbb{R}P^2$, projektiva planet).

Vi är intresserade av **icke-triviala** utväxlingar:

Definition: En loop i ett rum X kallas **trivial** om den kan kontinuerligt deformeras till en punkt.

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Sammanfattning:
För att studera kontinuerliga utväxlingar av **två** partiklar i $\mathbb{R}^3$ kan vi alltså i princip reducera till studiet av kontinuerliga utväxlingar av **en** "partikel" $\mathbf{r}$ som rör sig i mängden

$$X_{\mathrm{red}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| = 1 \text{ och } \mathbf{r} \sim -\mathbf{r}\},$$

d.v.s. loopar i X_{red} (tekniskt $= \mathbb{R}P^2$, projektiva planet).

Vi är intresserade av **icke-triviala** utväxlingar:

Definition: En loop i ett rum X kallas **trivial** om den kan kontinuerligt deformeras till en punkt.

Vilka av looparna i X_{red} är triviala?

Kontinuerliga utväxlingar av partiklar

Sammanfattning:
För att studera kontinuerliga utväxlingar av **två** partiklar i $\mathbb{R}^3$ kan vi alltså i princip reducera till studiet av kontinuerliga utväxlingar av **en** "partikel" $\mathbf{r}$ som rör sig i mängden

$$X_{\text{red}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| = 1 \text{ och } \mathbf{r} \sim -\mathbf{r}\},$$

d.v.s. loopar i X_{red} (tekniskt $= \mathbb{R}P^2$, projektiva planet).

Vi är intresserade av **icke-triviala** utväxlingar:

Definition: En loop i ett rum X kallas **trivial** om den kan kontinuerligt deformeras till en punkt.

Vilka av looparna i X_{red} är triviala? $\Rightarrow$ **Dubbel** utväxling av två partiklar i $\mathbb{R}^3$ är detsamma som **ingen** utväxling!

Bosoner och fermioner

Kom ihåg vågfunktionen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{C}, \qquad P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2$$

Bosoner och fermioner

Kom ihåg vågfunktionen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{C}, \qquad P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2$$

Representera nu en (kontinuerlig) utväxling med ett tal $z \in \mathbb{C}$:

$$\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = z\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Bosoner och fermioner

Kom ihåg vågfunktionen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{C}, \qquad P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2$$

Representera nu en (kontinuerlig) utväxling med ett tal $z \in \mathbb{C}$:

$$\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = z\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Ingen utväxling (start): 1 (referenspunkt).

Bosoner och fermioner

Kom ihåg vågfunktionen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{C}, \qquad P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2$$

Representera nu en (kontinuerlig) utväxling med ett tal $z \in \mathbb{C}$:

$$\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = z\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Ingen utväxling (start): 1 (referenspunkt).
En utväxling ger z.

Bosoner och fermioner

Kom ihåg vågfunktionen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{C}, \qquad P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2$$

Representera nu en (kontinuerlig) utväxling med ett tal $z \in \mathbb{C}$:

$$\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = z\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Ingen utväxling (start): 1 (referenspunkt).
En utväxling ger z.
Två utväxlingar ger z^2.

Bosoner och fermioner

Kom ihåg vågfunktionen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{C}, \qquad P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2$$

Representera nu en (kontinuerlig) utväxling med ett tal $z \in \mathbb{C}$:

$$\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = z\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Ingen utväxling (start): 1 (referenspunkt).
En utväxling ger z.
Två utväxlingar ger z^2. Detsamma som ingen utväxling: $\boxed{z^2 = 1}$

Bosoner och fermioner

Kom ihåg vågfunktionen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{C}, \qquad P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2$$

Representera nu en (kontinuerlig) utväxling med ett tal $z \in \mathbb{C}$:

$$\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = z\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Ingen utväxling (start): 1 (referenspunkt).
En utväxling ger z.
Två utväxlingar ger z^2. Detsamma som ingen utväxling: $\boxed{z^2 = 1}$

$$\Rightarrow \qquad z = \pm 1$$

boson
fermion

Konsekvenser

En konsekvens av minustecknet för fermioner är att de inte kan begfinna sig i samma tillstånd, eller punkt $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

Konsekvenser

En konsekvens av minustecknet för fermioner är att de inte kan begfinna sig i samma tillstånd, eller punkt $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

$\Rightarrow P = 0$ på diagonalen.

Detta kallas för **Pauli's exklusionsprincip**

Konsekvenser

En konsekvens av minustecknet för fermioner är att de inte kan begfinna sig i samma tillstånd, eller punkt $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

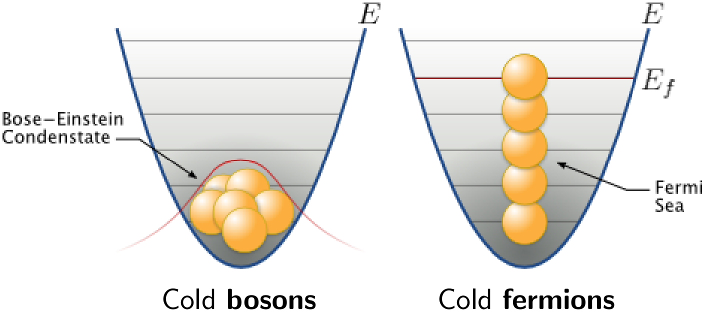
$\Rightarrow P = 0$ på diagonalen.

Detta kallas för **Pauli's exklusionsprincip**

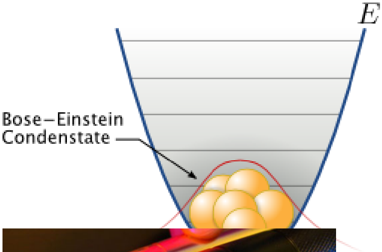
OBS: Samma logik och slutsats gäller även rent teoretiskt i högre dimensioner än tre, dock **annorlunda** i en och två dimensioner! (min forskning... s.k. "**anyoner**", kan slå knut på sig själva)

[Leinaas, Myrheim 1977; Goldin, Menikoff, Sharp 1981; Wilczek 1982]

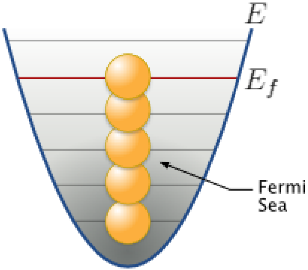
Kvantstatistik i 3D



Kvantstatistik i 3D

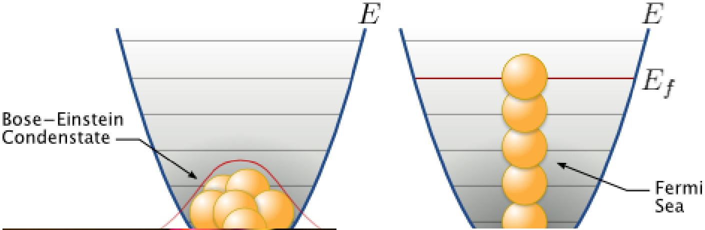


kraftförmedlare (fluff/degen.)

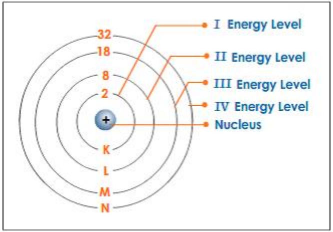


Cold **fermions**

Kvantstatistik i 3D



kraftförmedlare (fluff/degen.)



materia (stabilt/icke-degen.)

Många partiklar

Bosoner i **Bose-Einstein kondensat**: ϕ

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) = \prod_{j=1}^{N} \phi(\mathbf{x}_j)$$

Sannolikhetsfördelning: oberoende och likafördelade enl. P_ϕ

$$P_\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) := |\Psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)|^2 = \prod_{j=1}^{N} |\phi(\mathbf{x}_j)|^2$$

Många partiklar

Bosoner i **Bose-Einstein kondensat**: ϕ

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) = \prod_{j=1}^{N} \phi(\mathbf{x}_j)$$

Sannolikhetsfördelning: oberoende och likafördelade enl. P_ϕ

$$P_\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) := |\Psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)|^2 = \prod_{j=1}^{N} |\phi(\mathbf{x}_j)|^2$$

Fermioner i **Fermi-hav**: $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ linjärt oberoende

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) = \det \left[\phi_k(\mathbf{x}_j)\right]_{1 \le j,k \le N}$$

Sannolikhetsfördelning: korrelerade enligt en determinant-process,

$$P_\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) = 0 \quad \text{om } \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k,\ j \neq k$$

Materiens stabilitet: kombination av osäkerhet & exklusion

Repulsionen i P_Ψ är starkare än så, och kan effektivt/lokalt betraktas som en potentiell energi

$$V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \sim \frac{1}{N} \sum_{1 \le j < k \le N} \frac{1}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}$$

Med en sådan repulsion blir för N elektrostatiskt växelverkande kvantpartiklar i $3D$ lägsta energin

$$E(N) \sim -CN$$

och utan

$$E(N) \sim -CN^{7/5}$$

jfr. vita/degenererade dvärgar, neutronstjärnor, bosonstjärnor...?

Några referenser för den nyfikne

J. M. Leinaas and J. Myrheim, *On the theory of identical particles*, Nuovo Cimento B 37 (1977), 1–23.

J. Myrheim, *Anyons*, in Topological aspects of low dimensional systems, Les Houches summer school, 1999.

E. H. Lieb and R. Seiringer, *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2010.

D. L., *Methods of modern mathematical physics: Uncertainty and exclusion principles in quantum mechanics*, lecture notes for a master-level course given at KTH in 2017 and LMU Munich in 2019, `arXiv:1805.03063` (revision underway)

Tack!

Funbo runsten, Uppsala