

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik
Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. J. Huber

Studienarbeit
Untersuchung Punktierter Trelliscodes

Betreuung: Dipl.-Ing. Robert Fischer
Bearbeitung: Markus Helmut Flierl

6. Februar 1996

Erklärung

„Ich versichere, daß ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und daß die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.“

Erlangen, 6. Februar 1996

*What immortal hand or eye
Dare frame thy fearful symmetry?*

— *William Blake*

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	v
Liste der verwendeten Formelzeichen	vi
Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
2 Modellbeschreibung	2
2.1 Modell eines digitalen Übertragungssystems	2
2.1.1 Kanalencoder und Kanaldecoder	2
2.1.2 Modulation und Demodulation	3
2.1.3 Zeitkontinuierlicher Kanal	4
2.2 Ein zeitdiskretes Kanalmodell	4
2.3 Trelliscodierte Pulsamplitudenmodulation	6
2.3.1 Der Trelliscoder	7
2.3.1.1 Praktische Realisierung des Trelliscoders	8
2.3.2 Das Mapping: Einbettung der Codesymbole in einen metrischen Raum	9
2.4 Decodierung der Trelliscodierten Pulsamplitudenmodulation	10
2.4.1 Optimale Decodierung	10
2.4.2 Viterbi-Algorithmus	11
3 Kriterien zur Bewertung von Trelliscodes	14
3.1 Leistungseffizienz und Modulationsrate	14
3.2 Komplexität des Codes	14
3.3 Flexibilität beim Austausch zwischen Fehlerrate und Modulationsrate . . .	15
4 Konstruktion eines Trelliscodes	16
4.1 Konstruktion nach Ungerböck	16
4.1.1 Bestimmung des Mappings durch Partitionierung der Signalmenge .	16
4.1.2 Der Optimale Coder	19
4.2 Darstellung der Beurteilungskriterien für Ungerböck-Codes	21
5 Punktierte Trelliscodes	25
5.1 Einführung	25
5.2 Trellisstruktur für punktierte Coder	26
5.3 Das Punktierungsmuster	28

5.4	Die Zuordnung und die Metrikberechnung	28
5.5	Realisierung punktierter Trelliscodes	31
5.6	Vergleich anhand der Leistungseffizienz	33
5.7	Vergleich anhand der Komplexität	34
5.8	Flexible Anpassung	35
6	Pragmatische Trelliscodes	36
6.1	Einführung	36
6.2	Quasi-Standard Faltungscodes und Binäre Gitter	38
6.3	Decodierung des P^2 -Codes	41
6.4	Vergleich Anhand der Leistungseffizienz	42
6.5	Vergleich Anhand der Komplexität	43
6.6	Flexible Anpassung	43
7	Leistungseffizienterer P^2 Code	44
7.1	Einführung	44
7.2	Konstruktion	44
7.3	Simulationsergebnisse	45
8	Ausblick	47
A	CCPAM: Metrische und Algebraische Eigenschaften	48
A.1	Eigenschaften einer Menge \mathcal{X}	48
A.1.1	Algebraische Eigenschaften des Körpers $(\mathcal{X}, \oplus, \odot)$	48
A.1.2	Metrische Eigenschaften	48
A.2	Verknüpfung der Eigenschaften	49
A.2.1	Veranschaulichung	49
A.2.2	Algebraische Forderungen	49
A.2.3	Geometrische Forderungen	50
A.2.4	Reguläres Labeling	51
A.3	Beispiel: Trelliscodierte PAM mit Ungerböck Partitionierung $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	51
B	Simulationsprogramme	54
B.1	TCM.C	54
B.2	PTCM.C	54
B.3	PPTCM.C	55
	Literaturverzeichnis	56

Zusammenfassung

Punktierte Trelliscodes sind eine Teilklasse trelliscodierter Modulationsverfahren bei der mehr als ein Trellisschritt pro Modulationsintervall durchgeführt wird. Diese Eigenschaft in Verbindung mit dem Viterbi-Algorithmus, der zur Decodierung der trelliscodierten Modulationsverfahren verwendet wird, eröffnen praktische Vorteile bei der Realisierung codierter Modulationsverfahren.

Es werden die Eigenschaften dieser Teilklasse untersucht und die Ergebnisse dieser Untersuchungen führen Erstens zu einem Decodieralgorithmus, basierend auf dem Viterbi-Algorithmus, und Zweitens zu einem Konstruktionsverfahren für punktierte Trelliscodes. Die daraus resultierenden Codes sind vergleichbar mit den optimalen Codes.

Im weiteren untersuchen wir sogenannte pragmatische Trelliscodes, die weit ab von der Leistungsfähigkeit der optimalen Trelliscodes liegen aber dafür praktisch einfacher zu realisieren sind. Durch Übertragung der Eigenschaften der punktierten Trelliscodes wird nun versucht, die Leistungsfähigkeit dieser Codes zu verbessern. Es wird ein sogenannter P^2 Code (pragmatischer punktierter Trelliscode) vorgestellt und untersucht.

Schließlich zeigen wir, wie aus dem Quasi-Standard Faltungscodes, der der Klasse der pragmatischen Trelliscodes zugrundeliegt, mit Hilfe der Strukturbedingungen punktierter Trelliscodes ein neuer leistungsfähigerer P^2 -Code konstruiert werden kann.

Diese Untersuchungen sind eingerahmt von einem Modell eines digitalen Übertragungssystems, das wir am Beginn der Arbeit vorstellen. Als Referenz für die Untersuchungen wurden die optimalen Ungerböck-Codes verwendet, die ebenfalls kurz erklärt werden.

Liste der verwendeten Formelzeichen

Zeitfunktionen, Folgen und Signalpunkte

$v(t)$	Komplexes Signal als Funktion der Zeitvariablen t
$s(t)$	Sendsignal
$e(t)$	Empfangssignal
$n(t)$	Störsignal
$\phi_i(t - \mu T)$	Komplexe i -te Basisfunktion verschoben um das μ -fache des Modulationsintervalls T
$\langle v_\mu \rangle$	Sequenz mit Index μ
$\langle v_\mu \rangle_\alpha^\beta$	Endliche Sequenz $(a_\alpha, a_{\alpha+1}, \dots, a_\beta)$
$\langle \vec{v}_\mu \rangle$	Sequenz von Vektoren \vec{v} mit Index μ
$\langle \vec{v}_\mu \rangle^{(i)}$	i -tes Element der Signalklasse $\langle \vec{v}_\mu \rangle$
$\langle \vec{s}_\mu \rangle$	Sendevektorsequenz
$\langle \vec{e}_\mu \rangle$	Empfangsvektorsequenz
$\langle \vec{n}_\mu \rangle$	Störvektorsequenz
v	Basisfreier Signalpunkt im Signalraum
s	Sendsignalpunkt
e	Empfangssignalpunkt
\vec{v}_μ	Amplitudenwert, Signalpunkt im μ -ten Unterraum
(v_γ^i)	$= (v_\gamma^{n-1}, \dots, v_\gamma^0) = (v_{0\gamma}, \dots, v_{(n-1)\gamma}) = \vec{v}_\gamma$
$\wp \vec{v}_\mu$	Amplitudenwert, Projektion des Signalpunktes \vec{v}_μ im μ -ten Unterraum auf den D -komplex-dimensionalen Teilraum

Weitere Funktionen und Distributionen

$F_v(V)$	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen v
$f_v(V)$	Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariablen v
σ_v^2	Varianz der Zufallsvariablen v
$d(\cdot, \cdot)$	Allgemeine Distanz zwischen Punkten im Signalraum
$d_E^2(\cdot, \cdot)$	Quadratische Euklidische Distanz
$d_H(\cdot, \cdot)$	Hamming Distanz
$h_E^2(\cdot, \cdot)$	Quadratische Euklidische Distanz zwischen Gittern der gleichen Klasse
f	Ausgangsfunktion der Finite State Machine
g	Zustandsübergangsfunktion der Finite State Machine
$\delta(t)$	Dirac-Impuls

Operatoren

$M(\cdot)$	Operator zur Beschreibung des Mappings
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Erwartungswert
$\Re\{\cdot\}$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im\{\cdot\}$	Imaginärteil einer komplexen Größe
$[\cdot]^*$	konjugiert komplexer Wert einer komplexen Größe
$\cdot \oplus \cdot$	Gruppenoperation der Addition über GF(2)
$\cdot \odot \cdot$	Gruppenoperation der Multiplikation über GF(2)
$\cdot \bullet \cdot$	Skalarprodukt im reellen Vektorraum

Vektoren, Matrizen

δ_{ij}	Kroneckersymbol
$\vec{V}(D)$	Polynomvektor
$\mathbf{G}(D)$	Polynommatrix
I	Einheitsmatrix
R	Abbildungsmatrix
\underline{U}	Unitäre Basis
\underline{s}	Koeffizienten der unitären Basis

Konstanten

k	Anzahl der vom Faltungscoder zu codierenden Bits
n	Länge des Quellensymbolblocks in Bit
$n + r$	Länge des Codesymbolblocks in Bit
r_c	relative Redundanz des Codes
v	Parameter zur Klassifizierung der Zuordnungsvorschrift
A	Aufwandszahl; Maß für die Komplexität
N_0	Rauschleistungsdichte in zwei Dimensionen
R_c	Rate des Codes
R_m	Rate der Modulation
S_γ	Zustandsnummer im Schritt γ
T_q	Quellensymbolabstand
T_T	Trellisschrittintervall
$T_{\bar{c}}$	Codierintervall
T	Modulationsintervall
Δ_i	Gitterkonstante; minimale Euklidische Distanz zweier benachbarter Punkte
σ^2	Varianz der gaußverteilten komplexen Komponenten des Störsignals

Mengen

\mathcal{V}_n	Indexmenge mit n Symbolen
\mathcal{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathcal{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathcal{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathcal{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathcal{S}^l	l -te Zustandsteilmenge
\mathcal{L}, \mathcal{G}	Gitter

Abbildungsverzeichnis

2.1	<i>Modell eines digitalen Übertragungssystems</i>	2
2.2	<i>Modell eines zeitkontinuierlichen Kanals</i>	4
2.3	<i>Modell eines zeitdiskreten Kanals</i>	6
2.4	<i>Modell der Trelliscodierten PAM</i>	6
2.5	<i>Trellisdiagramm für Finite State Machine</i>	8
2.6	<i>Faltungscoderstrukturen $R_c = 4$</i>	9
2.7	<i>Signalkonstellation und Zuordnung der Codesymbole</i>	10
2.8	<i>Sequenzschätzung beim Viterbi-Algorithmus</i>	12
4.1	<i>$Z^2/2RZ^2$ Partitionierung der 32CROSS Signalkonstellation</i>	17
4.2	<i>Labeling der 32Cross Signalkonstellation</i>	18
4.3	<i>Partitionierungskette und Codebit-Levels</i>	18
4.4	<i>Fehlerereignisarten im Trellis</i>	19
4.5	<i>Realisierung des Faltungscodes und Koeffizienten der Prüfmatrix</i>	20
4.6	<i>Symbolfehlerrate für Ungerböck-Codes</i>	21
4.7	<i>Encoder für Teilmengencodes</i>	22
4.8	<i>Codierungsgewinn im Vergleich zur Komplexität</i>	23
4.9	<i>Fehlerrate und Flexibilität der Modulation</i>	23
5.1	<i>Beispiel: Zerlegung eines Trellis: $k = 2$</i>	25
5.2	<i>Finite State Machine und Punktierung</i>	26
5.3	<i>Teilung der Trellisstruktur</i>	27
5.4	<i>Anforderungen an die Trellisstruktur punktierter Faltungscoder</i>	27
5.5	<i>$Z/2Z \times Z/2Z$ der zwei Gruppen</i>	29
5.6	<i>Bestimmung der Zweiglängen aus der projizierten Signalkonstellation</i>	30
5.7	<i>Superposition der beiden Signalkonstellationen</i>	31
5.8	<i>Realisierung des punktierten Trelliscodes</i>	31
5.9	<i>Realisierung des Faltungscodes und Koeffizienten der Prüfmatrix</i>	32
5.10	<i>Trellisdiagramm für den punktierten Trelliscode</i>	32
5.11	<i>Leistungseffizienz der punktierten Codes</i>	33
5.12	<i>Degradierung der Leistungseffizienz durch die Decodiermethode punktierter Trelliscodes</i>	34
5.13	<i>Codierungsgewinn im Vergleich zur Komplexität: optimale punktierte Trelliscodes</i>	35
6.1	<i>Realisierung des pragmatischen Coders</i>	36
6.2	<i>32-Cross Signalkonstellation und Zuordnung der Binärsymbole</i>	37
6.3	<i>Leistungseffizienz des pragmatischen Trelliscodes</i>	37
6.4	<i>Vergleich zwischen quadratischer Euklidischer und Hamming Distanz</i>	38

6.5	<i>32Cross Signalkonstellation und punktierter Coder des P^2 Trelliscodes . . .</i>	39
6.6	<i>Vergleich zwischen quadratischer Euklidischer und Hamming Distanz beim P^2 Code</i>	40
6.7	<i>Leistungseffizienz des pragmatischen punktierten Trelliscodes</i>	41
6.8	<i>Veranschaulichung der Distanzberechnung für P^2 Decoder</i>	41
6.9	<i>Leistungseffizienz des suboptimal decodierten pragmatischen punktierten Trelliscode</i>	42
7.1	<i>Systematische Struktur des Quasi-Standard Faltungscoders</i>	45
7.2	<i>Leistungseffizienz des optimal punktierten Quasi-Standard Faltungscode . .</i>	45
7.3	<i>Vergleich der Trelliscodes konstruiert aus dem Quasi-Standard Faltungscode</i>	46
A.1	<i>Verknüpfung metrischer und algebraischer Eigenschaften</i>	49
A.2	<i>Systemmodell des Coders</i>	51
A.3	<i>Isomorphismus zwischen zwei additiven Gruppen</i>	52
A.4	<i>Die Subsets der Partitionierung $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$</i>	52
A.5	<i>Metrikstruktur der Lattices</i>	52

Tabellenverzeichnis

4.1	<i>Wechselseitige Distanzen der Teilmengen aus der $\mathcal{Z}^2/2R\mathcal{Z}^2$ Partitionierung</i>	19
4.2	<i>Ungerböck Codes für \mathcal{Z}^2 Signalkonstellationen</i>	21
4.3	<i>Codierungsgewinn und Komplexität</i>	22
4.4	<i>Flexibilität der Modulationsrate</i>	24
5.1	<i>Abkürzungen der durch die Codebits adressierten Teilmengen</i>	29
5.2	<i>Punktierte Trelliscodes für \mathcal{Z}^2 Signalkonstellationen</i>	31
5.3	<i>Codierungsgewinn und Komplexität für optimal punktierte Trelliscodes</i>	35
6.1	<i>Die Zuordnung der Nebenklassen zu den codierten Levels beim P^2 Code</i>	39

Kapitel 1

Einleitung

Trelliscodierte Modulationsverfahren ermöglichen eine sichere Datenübertragung über gestörte Kanäle. Diese Verfahren betrachten nun Modulation und Kanalcodierung als eine Einheit und werden zusammen optimiert. Eine Möglichkeit der Optimierung dieser Klasse von Modulationsverfahren wurde erstmals von Gottfried Ungerböck vorgestellt. Dabei wird der optimale Kanalcode bei gegebener Signalkonstellation bestimmt. Dies hat nun den Nachteil, daß dieser optimale Code nur für diese spezielle Signalkonstellation gilt. Bei technischen Realisierungen ist aber nun der Coder bzw. Decoder durch die Hardware-Realisierung vorgegeben.

Die Punktierung der Rate $\frac{1}{2}$ Coder ist nun eine Möglichkeit, diesen technischen Schwierigkeiten zu entgegnen. Der binäre Faltungscoder der Rate $\frac{1}{2}$ wird pro Codierschritt k -fach getaktet und erzeugt somit einen Code der Rate $\frac{k}{2^k}$. Durch Punktierung, d.h. Streichung von $k-1$ Bits ergibt sich ein Code der Rate $\frac{k}{k+1}$. Es wird nun Versucht, diesen punktierten Faltungscoder für das trelliscodierte Modulationsverfahren einzusetzen.

Solche Versuche führen z.B. zu der Klasse der pragmatischen punktierten Trelliscodes. Pragmatisch deswegen, weil hier versucht wird, einen Quasi-Standard Faltungscoder der Rate $\frac{1}{2}$ zu verwenden, der bereits als Hardware Implementierung sowohl für Encoder als auch Decoder bereits vorliegt.

Beispiele dieser pragmatischen Codes werden in dieser Arbeit vorgestellt und deren Effizienz im Vergleich zu den optimalen Codes beurteilt. Die dabei vorgestellten Konstruktionen betrachten eigentlich das Problem, den vom Coder erzeugten Binärkode für das Modulationsverfahren zu nutzen. Eine viel aufschlußreichere Methode ist dabei die Untersuchung der Trellisstruktur des Encoders. Sie wurde von J. Kim in [15] dargestellt und durch eine Tabelle von punktierten Trelliscodes ergänzt, die im Leistungsverhalten mit den optimalen Ungerböck Codes vergleichbar sind.

Kapitel 2

Modellbeschreibung

2.1 Modell eines digitalen Übertragungssystems

Für die folgenden Untersuchungen wird ein Modell zur Übertragung zeitdiskreter Informationen kurz vorgestellt. Dieses Modell umfaßt sowohl die wichtigsten Systemkomponenten als auch Signaldarstellungen.

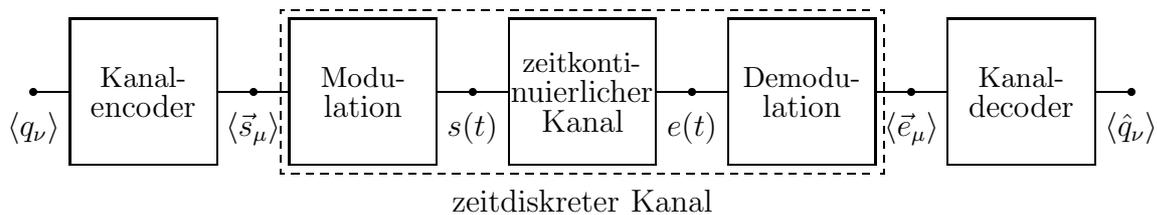


Abbildung 2.1: Modell eines digitalen Übertragungssystems

2.1.1 Kanalcoder und Kanaldecoder

Die Quellensymbolsequenz $\langle q_\nu \rangle$ der digitalen Nachrichtenquelle wird durch den Kanalcoder auf den Signalpunkt $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ abgebildet. Der Signalpunkt $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ ist Element des Signalraumes \mathcal{C}^∞ . Dieser Signalraum besitzt eine zweifache Basisdarstellung:

1. Betrachtet man einen Signalpunkt $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ in Sequenzrichtung, so existiert für jedes Folgenglied ein linear unabhängiger Basisvektor.

$$\langle \vec{s}_\mu \rangle = (\dots, \vec{s}_{-1}, \vec{s}_0, \vec{s}_1, \dots)$$

2. Betrachtet man einen Signalpunkt $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ an der Position μ in der Sequenz, so besitzt der Amplitudenwert auch eine Basisdarstellung mit den Koeffizienten $s_{i\mu} \in \mathcal{C}$:

$$\vec{s}_\mu = (s_{1\mu}, s_{2\mu}, \dots, s_{i\mu}, \dots, s_{D\mu}, 0, 0, \dots)$$

Der Kanaldecoder weist dem Empfangssignalpunkt $\langle \vec{e}_\mu \rangle$ die Empfangssymbolsequenz $\langle \hat{q}_\nu \rangle$ zu. Dabei sind die Quellensymbole q_ν bzw. die geschätzten Quellensymbole \hat{q}_ν der Quellensymbolsequenzen $\langle q_\nu \rangle$ bzw. $\langle \hat{q}_\nu \rangle$ Elemente des Quellensymbolvorrats \mathcal{V}_q .

2.1.2 Modulation und Demodulation

Die Modulation ordnet umkehrbar eindeutig dem Signalpunkt $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ das zeit- und wertkontinuierliche komplexe Tiefpaßsignal $s(t)$ zu:

$$s(t) = \sum_{\mu \in \mathcal{Z}} \sum_{i \in \mathcal{N}} s_{i\mu} \phi_i(t - \mu T) \quad (2.1)$$

Das komplexe Tiefpaßsignal $s(t)$ wird somit in orthonormale komplexe Basisfunktionen $\phi_i(t - \mu T)$ zerlegt, welche, sowohl zeitgleich untereinander, als auch bezüglich Zeitverschiebung um vielfache des Modulationsintervalls T , folgende doppelte Orthonormalitätsbedingung erfüllen [13]:

$$\frac{1}{T} \int_{\mathcal{R}} \phi_k(t - \mu T) \phi_l^*(t - \nu T) dt = \delta_{kl} \delta_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} \quad (2.2)$$

Die Demodulation ist die Umkehrung der Modulation, d.h. sie weist umkehrbar eindeutig dem komplexen Tiefpaßsignal $e(t)$ den Signalpunkt $\langle \vec{e}_\mu \rangle$ zu. Da $e(t)$ durch

$$e(t) = \sum_{\mu \in \mathcal{Z}} \sum_{i \in \mathcal{N}} e_{i\mu} \phi_i(t - \mu T) \quad (2.3)$$

dargestellt werden kann, bestimmt die Demodulation somit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{\mathcal{R}} e(t) \phi_j^*(t - \nu T) dt &= \frac{1}{T} \int_{\mathcal{R}} \sum_{\mu \in \mathcal{Z}} \sum_{i \in \mathcal{N}} e_{i\mu} \phi_i(t - \mu T) \phi_j^*(t - \nu T) dt \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{Z}} \sum_{i \in \mathcal{N}} e_{i\mu} \frac{1}{T} \int_{\mathcal{R}} \phi_k(t - \mu T) \phi_l^*(t - \nu T) dt \\ &= \sum_{\mu \in \mathcal{Z}} \sum_{i \in \mathcal{N}} e_{i\mu} \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} \\ &= e_{j\nu} \end{aligned}$$

Geometrisch veranschaulicht kann man die Modulation als einen Basiswechsel vom euklidischen Raum zu einem äquivalenten Raum darstellen, dessen Basis orthonormale Zeitfunktionen repräsentieren. Die Demodulation kehrt diesen Basiswechsel um. So bestimmen z.B. die Komponenten $s_{i\mu}$ den Signalpunkt s im Signalraum mit der Basis $\phi_i(t - \mu T)$ als auch den Signalpunkt $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ im Signalraum mit der Euklidischen Basis.

Die für die Decodierung nicht relevanten Daten werden bei der praktischen Demodulation nicht bestimmt. Sei D die komplexe Dimensionalität des Sendesignalraumes je Modulationsschritt T , so beschränken sich die relevanten Daten auf die Koeffizienten der D komplexen Basisfunktionen $\phi_j(t - \nu T)$, die im Demodulator bestimmt werden. Die Relevanz der Daten unter dem Aspekt der Decodierung resultiert dabei aus dem Optimalitätskriterium für die Decodierung (siehe Abschnitt 2.4).

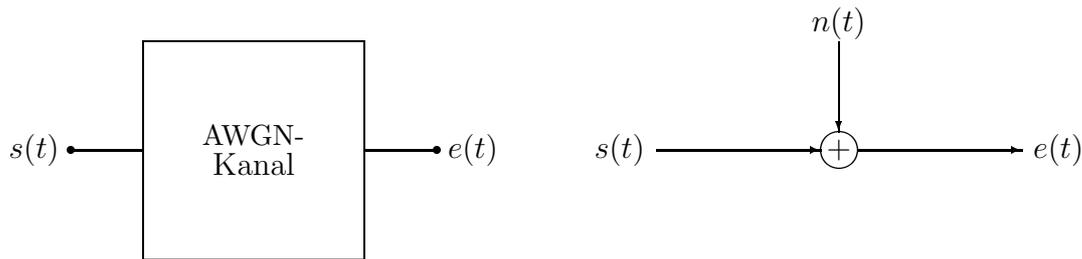


Abbildung 2.2: Modell eines zeitkontinuierlichen Kanals

2.1.3 Zeitkontinuierlicher Kanal

Der zeitkontinuierliche Kanal beschreibt den Vorgang der Verfälschung des zeitkontinuierlichen Sendesignals $s(t)$ zum Empfangssignal $e(t)$ durch eine nicht-deterministische Störung. Es wird das Modell des stationären AWGN-Kanals verwendet.

Eingangs-, Stör-, und Ausgangssignal sind komplexe Signale. Für die bedingte Verteilungsdichtefunktion $f_{e|s}(y, t_2 | x, t_1)$, die die Wahrscheinlichkeit des empfangenen Signals $e(t)$ unter Voraussetzung des gesendeten Signals $s(t)$ angibt, gilt per Definition [11]:

$$f_{e|s}(y, t_2 | x, t_1) = f_n(y - x, t_2 - t_1) = f_n(z, \tau) \quad (2.4)$$

Der stationäre AWGN-Kanal wird durch einen stationären, mittelwertfreien komplexen (d.h. zweidimensional reellen) gaußschen Prozeß gestört. Unter Berücksichtigung komplexer Zeitsignale (d.h. zweidimensionaler reeller Signale) gilt für die Autokorrelationsfunktion:

$$\mathcal{E} \{n(t)n^*(t + \tau)\} = N_0\delta(\tau) \quad (2.5)$$

und für die Verteilungsdichtefunktion:

$$f_n(z) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{1}{N_0}|z|^2} \quad \forall t \quad (2.6)$$

Die Varianzen der zwei reellwertigen Verteilungsdichtefunktionen für Real- und Imaginärteil sind identisch und ergeben sich zu: $\sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = \frac{1}{2}N_0$

2.2 Ein zeitdiskretes Kanalmodell

Für die Untersuchung des Kanalencoders und Kanaldecoders möchten wir die Signalpunkte in der zeitdiskreten Basis darstellen. Deshalb transformieren wir die Eigenschaften des zeitkontinuierlichen Kanalmodells in ein zeitdiskretes Kanalmodell. Dazu untersuchen wir die statistischen Eigenschaften der komplexen Komponenten des Störsignalpunktes:

$$n_{i\mu} = \frac{1}{T} \int_{\mathcal{R}} n(t)\phi_i^*(t - \mu T)dt \quad (2.7)$$

Nach [17] sind die Komponenten gaußverteilt. Somit bestimmen das erste und zweite Moment die Verteilungsdichtefunktion eindeutig:

$$\mathcal{E}\{n_{i\mu}\} = \frac{1}{T} \int_{\mathcal{R}} \mathcal{E}\{n(t)\} \phi_i^*(t - \mu T) dt = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}\{n(t)\} = 0 \quad \forall t$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{n_{i\mu} n_{j\nu}^*\} &= \frac{1}{T^2} \int_{\mathcal{R}^2} \mathcal{E}\{n(t_1) n^*(t_2)\} \phi_i^*(t_1 - \mu T) \phi_j(t_2 - \nu T) d(t_1, t_2) \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{\mathcal{R}^2} N_0 \delta(t_2 - t_1) \phi_i^*(t_1 - \mu T) \phi_j(t_2 - \nu T) d(t_1, t_2) \\ &= \frac{N_0}{T^2} \int_{\mathcal{R}} \phi_j(t_1 - \nu T) \phi_i^*(t_1 - \mu T) dt_1 \\ &= \frac{N_0}{T} \delta_{ji} \delta_{\nu\mu} \end{aligned}$$

Die Komponenten des Störsignals $n(t)$ sind also bei gleicher Varianz $\sigma^2 = \frac{N_0}{T}$ mittelwertfrei, unkorreliert, gaußverteilt und somit auch statistisch unabhängig. Somit gilt

1. für die Verteilungsdichtefunktion der Störkomponenten:

$$f_{n_{i\mu}}(z_{i\mu}) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{\sigma^2}|z_{i\mu}|^2} \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{T} \quad (2.8)$$

2. für die Wahrscheinlichkeit des Störsignalpunktes bzw. der bedingten Wahrscheinlichkeit des Empfangssignalpunktes:

$$P(\langle \vec{n}_\mu \rangle) = \prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i \in \mathcal{N}} P(n_{i\mu}) \quad (2.9)$$

$$P(\langle \vec{e}_\mu \rangle | \langle \vec{s}_\mu \rangle) = \prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i \in \mathcal{N}} P(e_{i\mu} | s_{i\mu}) \quad (2.10)$$

3. für die bedingte Verteilungsdichtefunktion des Empfangssignalpunktes

$$f_{\langle \vec{e}_\mu \rangle | \langle \vec{s}_\mu \rangle}(\langle \vec{y}_\mu \rangle | \langle \vec{x}_\mu \rangle) = \prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i \in \mathcal{N}} \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{\sigma^2}|y_{i\mu} - x_{i\mu}|^2} \quad (2.11)$$

Nach Anwendung der Funktionalgleichung der e -Funktion ergibt sich im Exponent ein Ausdruck, der dem der *quadratischen Euklidischen Distanz* im Signalraum mit der zeitdiskreten Basis (Euklidischer Raum) entspricht.

$$d_E^2(\langle \vec{y}_\mu \rangle, \langle \vec{x}_\mu \rangle) = \sum_{\mu \in \mathcal{Z}} \sum_{i \in \mathcal{N}} |y_{i\mu} - x_{i\mu}|^2 \quad (2.12)$$

$$f_{\langle \vec{e}_\mu \rangle | \langle \vec{s}_\mu \rangle}(\langle \vec{y}_\mu \rangle | \langle \vec{x}_\mu \rangle) = \left(\prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i \in \mathcal{N}} \frac{1}{\pi\sigma^2} \right) e^{-\frac{1}{\sigma^2} d_E^2(\langle \vec{y}_\mu \rangle, \langle \vec{x}_\mu \rangle)} \quad (2.13)$$

Um für realistischere Modelle Frequenzumsetzungen, Signalverstärkungen, Dämpfungen und Verzerrungen zu berücksichtigen, sind entsprechende Systeme nach dem Modulator bzw. vor dem Demodulator einzufügen. Da diese Systeme durch Basentransformationen (lineare als auch nichtlineare) dargestellt werden können, haben sie keinen Einfluß auf das Modell des zeitdiskreten Kanals, solange die doppelte Orthonormalitätsbedingung (Gleichung 2.2) für die transformierten Basisfunktionen weiterhin gültig bleibt.

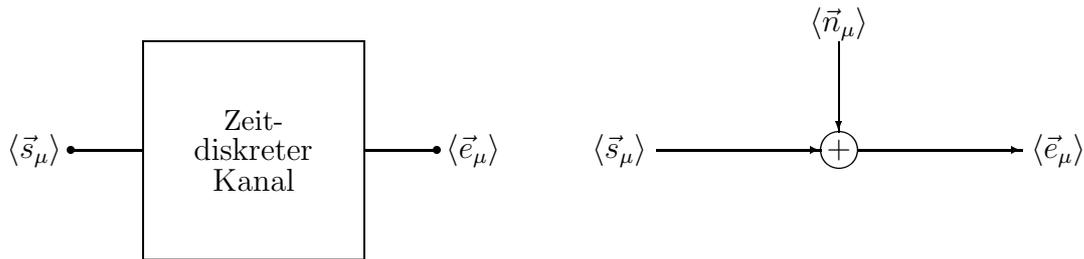


Abbildung 2.3: Modell eines zeitdiskreten Kanals

2.3 Trelliscodierte Pulsamplitudenmodulation

Nach kurzer und allgemein gehaltener Analyse des Kanalmodells betrachten wir ein Modell eines Kanalcodierungsverfahrens, das in der Literatur als *trelliscodierte Pulsamplitudenmodulation* bezeichnet wird und das durch Arbeiten von Gottfried Ungerböck [18, 19] entscheidend beeinflusst wurde:

1. Die Maßnahmen zur Sicherung der Datenübertragung über den oben beschriebenen Kanal haben keinen Einfluß auf die Bandbreite des Zeitsignals $s(t)$, und
2. Die Leistungseffizienz, d.h. die Qualität der Übertragung hinsichtlich der Resistenz gegenüber Kanalstörungen, wird bei gegebenem Informationsfluß und Modellrandbedingungen optimiert.

Das Modell der Trelliscodierten Pulsamplitudenmodulation wird im Blockschaltbild 2.4 dargestellt.

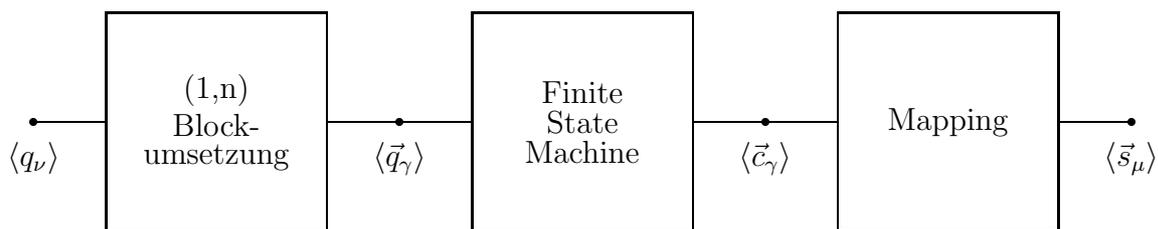


Abbildung 2.4: Modell der Trelliscodierten PAM

Dieses Modell setzt für die Quellensymbolsequenz $\langle q_\nu \rangle$ voraus, daß die einzelnen Quellensymbole q_ν untereinander alle statistisch unabhängig sind:

$$P(\langle q_\nu \rangle) = P(\dots, q_{-1}, q_0, q_1, \dots) = \prod_{\nu \in \mathcal{Z}} P(q_\nu) \quad (2.14)$$

Da in der Praxis realisierungstechnische Gründe von Bedeutung sind und der Realisierungsaufwand für die Codierung bzw. Decodierung von der Wahl des zugrundeliegenden

Symbolvorrats abhängt, wählen wir zur Repräsentation der digitalen Information Binärsymbole. Für die statistischen Eigenschaften der Quellensymbole q_ν wird für das Modell nun gefordert:

$$P(q_\nu) = \frac{1}{2} \quad q_\nu \in GF(2) \quad (2.15)$$

Die Blockwandlung der Quellensymbolsequenz $\langle q_\nu \rangle$ bildet Blöcke der Länge n , die in einem Codierintervall $T_{\vec{c}}$ parallel verarbeitet werden. Die Quellensymbole treten dabei in einem Quellensymbolabstand T_q auf.

$$nT_q = T_{\vec{c}} \quad \nu = n\gamma \quad (2.16)$$

Die *Finite State Machine* verarbeitet nun in einem Codierintervall $T_{\vec{c}}$ einen Quellensymbolblock \vec{q}_γ und erzeugt einen Codesymbolblock \vec{c}_γ der Länge $(n+r)$. r bezeichnet die Anzahl der redundanten Bits, die der Trelliscoder hinzufügt. Die Rate des Codes (mittlerer Informationsgehalt je Codesymbol) beträgt:

$$R_c = \frac{T_{\vec{c}}}{T_q} = n \quad (2.17)$$

Somit ergibt sich für die relative Redundanz r_c des Codes

$$r_c = \frac{r}{n+r} \quad (2.18)$$

Das Mapping ordnet nun redundanzfrei den 2^{n+r} möglichen Codesymbolen \vec{c}_γ v zeitlich aufeinanderfolgende, D -komplex-dimensionale Amplitudenwerten \vec{s}_μ zu. Diesen Vorgang bezeichnet man als v -fache Zuordnung, die pro Codierintervall $T_{\vec{c}}$ oder in v Modulationsintervallen T stattfindet.

$$T_{\vec{c}} = vT \quad v\gamma = \mu \quad (2.19)$$

Die *Stufenzahl* M bezeichnet die Anzahl der unterschiedlichen Amplitudenwerte \vec{s}_μ .

$$2^{n+r} = M^v \quad (2.20)$$

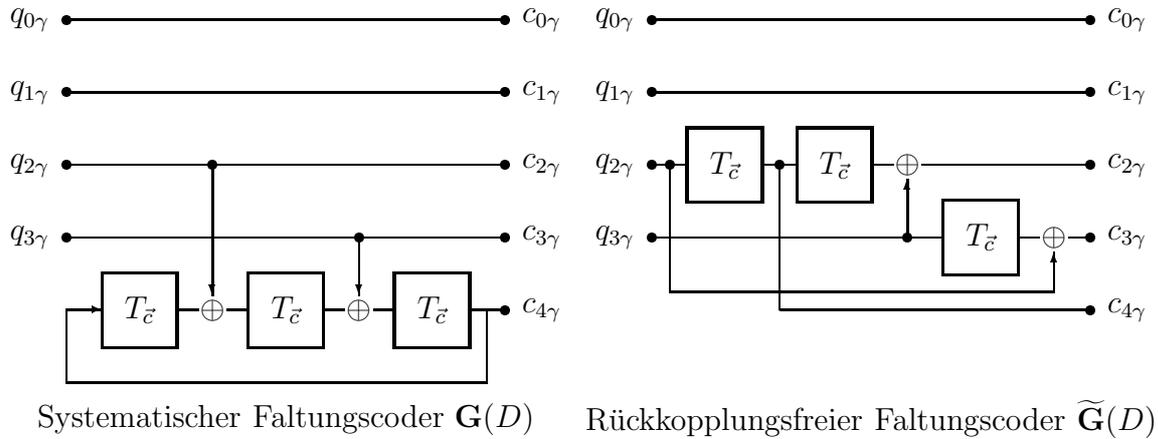
2.3.1 Der Trelliscoder

Der Trelliscoder ordnet im Codiervorgang den Quellensymbolblocksequenzen $\langle \vec{q}_\gamma \rangle$ eindeutig Codesymbolblocksequenzen $\langle \vec{c}_\gamma \rangle$ zu. Diese bijektive Abbildungsvorschrift wird durch die Struktur des Trelliscoders, d.h. durch die *Zustandsübergangsfunktion* g_γ , *Ausgangsfunktion* f_γ und den Z Zuständen S_γ der Finite State Machine, beschrieben.

$$S_{\gamma+1} = g_\gamma(S_\gamma, \vec{q}_\gamma) \quad (2.21)$$

$$\vec{c}_\gamma = f_\gamma(S_\gamma, \vec{q}_\gamma) \quad (2.22)$$

Falls die Finite State Machine zeitinvariant ist, so ist $g_\gamma = g$ und $f_\gamma = f$ für alle γ . Wiederholen sich die Funktionen periodisch, so spricht man von einer *periodisch zeitvarianten Finite State Machine*. Den Zustandsübergang von S_γ in den Folgezustand $S_{\gamma+1}$ bezeichnet man als *Zweig*.


 Abbildung 2.6: Faltungscoderstrukturen $R_c = 4$

Beide Realisierungen sind äquivalent, da sie sich nur um eine Verwürfelung der Eingangsblocksequenzen unterscheiden. Eine Verwürfelung ist eine eindeutige Abbildung der Menge der Quellensymbolblocksequenzen $\langle \vec{q}_\nu \rangle$ auf sich selbst und verändert somit nicht die statistischen Eigenschaften der Quellensymbolblocksequenzen. $\mathbf{G}(D)$ beschreibt den systematischen, und $\tilde{\mathbf{G}}(D)$ den rückkopplungsfreien Faltungscoder. Für beide gilt der Zusammenhang:

$$\mathbf{V}(D) \odot \mathbf{G}(D) = \tilde{\mathbf{G}}(D)$$

$$\mathbf{V}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{V}(D)) = D^3 \oplus 1$$

\odot bezeichnet die multiplikative Operation im Quotientenkörper. [13]

2.3.2 Das Mapping: Einbettung der Codesymbole in einen metrischen Raum

Wir betrachten zwei Codesymbolblocksequenzen $\langle \vec{c}_\gamma \rangle$ und $\langle \widehat{\vec{c}}_\gamma \rangle$. Wenn beide nicht identisch sind, d.h. sie unterscheiden sich um mindestens einen Symbolblock, so benötigen wir einen Wert $\mathbf{d}(\langle \vec{c}_\gamma \rangle, \langle \widehat{\vec{c}}_\gamma \rangle)$, der den Grad des Unterschiedes angibt. Da eine Störung eine Verschiebung des Signalpunktes $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ im Euklidischen Raum bedeutet, wollen wir diesen Verschiebungswert auch den Codesymbolblocksequenzen zuordnen. Dazu betten wir die Codesymbolblöcke \vec{c}_γ in den Euklidischen Raum ein und ordnen jedem von ihnen v zeitlich aufeinanderfolgende Amplitudenwerte \vec{s}_μ zu (v -fache Zuordnung).

Beispiel: Betrachten wir den Fall einer einfachen Zuordnung ($v = 1$, $\mu = \gamma$) von 8 verschiedenen Codesymbolblöcken \vec{c}_γ zu 8 verschiedenen Amplitudenwerten \vec{s}_γ . Abbildung 2.7 verdeutlicht das Beispiel. Dieses Mapping ist eine eindeutige und redundanzfreie Abbildung. Den Grad des Unterschiedes gibt nun die quadratische Euklidische Distanz an:

$$\mathbf{d}(\langle \vec{c}_\gamma \rangle, \langle \widehat{\vec{c}}_\gamma \rangle) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Z}} d_E^2(\vec{s}_\gamma, \widehat{\vec{s}}_\gamma)$$

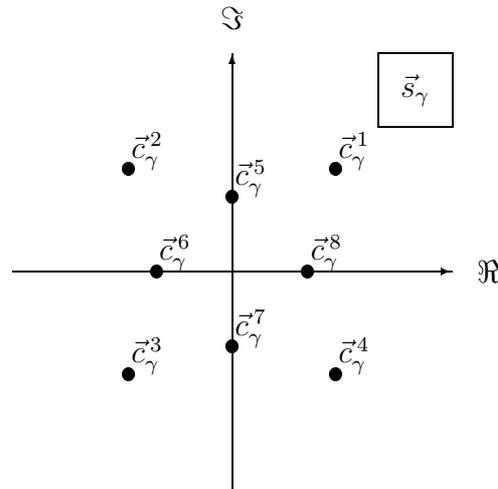


Abbildung 2.7: Signalkonstellation und Zuordnung der Codesymbole

2.4 Decodierung der Trelliscodierten Pulsamplitudenmodulation

2.4.1 Optimale Decodierung

Das Kriterium für die optimale Decodierung ist die *Maximum-a-posteriori-Schätzung*. Hierbei wird unter allen möglichen Sendesignalpunkten s diejenige als gesendet angenommen, die nach der Beobachtung des Empfangssignalpunktes e die größte Wahrscheinlichkeit besitzt:

$$P(\hat{s}|e) = \max_{\forall s} P(s|e) \quad (2.23)$$

Zur Vereinfachung dieses Kriteriums wird nun angenommen, daß alle Sendesignalpunkte s gleichwahrscheinlich sind. Mit dem Bayes'schen Satz gilt für diese Annahme:

$$\begin{aligned} P(\hat{s}|e) &= \max_{\forall s} \frac{P(e|s)P(s)}{P(e)} \\ &= \frac{P(s)}{P(e)} \max_{\forall s} P(e|s) \end{aligned}$$

Es genügt somit die Streuwahrscheinlichkeit $P(e|s)$ zu maximieren. Dieses Kriterium wird als *Maximum-Likelihood-Estimation* beschrieben:

$$P(e|\hat{s}) = \max_{\forall s} P(e|s) \quad (2.24)$$

In der Darstellung der zeitdiskreten Basis des Signalraumes erhält man die Entscheidungsvorschrift für die *Maximum-Likelihood-Sequence-Estimation* (MLSE):

$$P(\langle \vec{e}_\mu \rangle | \langle \widehat{\vec{s}}_\mu \rangle) = \max_{\forall \langle \vec{s}_\mu \rangle} P(\langle \vec{e}_\mu \rangle | \langle \vec{s}_\mu \rangle) \quad (2.25)$$

Unter Verwendung der Einschränkungen des zeitdiskreten Kanalmodells gilt für die Verteilungsdichtefunktion des Empfangssignals bei gegebenem und optimal gewähltem Sendesignalpunkt mit Gleichung 2.12:

$$f_{\langle \vec{e}_\mu \rangle | \widehat{\langle \vec{s}_\mu \rangle}}(\langle \vec{y}_\mu \rangle | \langle \vec{x}_\mu \rangle) = \left(\prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i \in \mathcal{N}} \frac{1}{\pi \sigma^2} \right) e^{-\frac{1}{\sigma^2} \min_{\forall \langle \vec{x}_\mu \rangle} d_E^2(\langle \vec{y}_\mu \rangle, \langle \vec{x}_\mu \rangle)} \quad (2.26)$$

Da die Exponentialfunktion eine monotone Funktion ist, beschränkt sich die max-Operation auf den Exponenten. Die Maximierung des negativ definiten Exponenten ist identisch der Minimierung der skalierten positiv definiten quadratischen Euklidischen Distanz d_E^2 .

Zusammenfassend formuliert ist die Decodierung mittels des Kriteriums der Maximum-a-posteriori-Sequenz-Schätzung äquivalent zum Kriterium der minimalen quadratischen Euklidischen Distanz $d_E^2(\langle \vec{e}_\mu \rangle, \langle \vec{s}_\mu \rangle)$ zwischen dem empfangenen Signalpunkt $\langle \vec{e}_\mu \rangle$ und den möglichen gesendeten Signalpunkten $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ unter der Voraussetzung, daß

1. ein AWGN-Kanal vorliegt, und
2. alle Sendesignalpunkte $\langle \vec{s}_\mu \rangle$ gleichwahrscheinlich sind.

Im weiteren untersuchen wir, welche Daten für die Decodierung von Bedeutung sind. Da die Komponenten des Störsignals statistisch unabhängig sind, können wir das MLSE-Kriterium mit Gleichung 2.10 zerlegen:

$$\begin{aligned} P(\langle \vec{e}_\mu \rangle | \widehat{\langle \vec{s}_\mu \rangle}) &= \max_{\forall \langle \vec{s}_\mu \rangle} \left(\prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i=1}^D P(e_{i\mu} | s_{i\mu}) \right) \left(\prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i=D+1}^{\infty} P(e_{i\mu}) \right) \\ &= \left(\prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i=D+1}^{\infty} P(e_{i\mu}) \right) \max_{\forall \langle \vec{s}_\mu \rangle} \prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i=1}^D P(e_{i\mu} | s_{i\mu}) \\ &= \left(\prod_{\mu \in \mathcal{Z}} \prod_{i=D+1}^{\infty} P(e_{i\mu}) \right) \max_{\forall \langle \vec{s}_\mu \rangle} \prod_{\mu \in \mathcal{Z}} P(\wp \vec{e}_\mu | \wp \vec{s}_\mu) \end{aligned}$$

Die Daten symbolisiert durch den Faktor C vor der max-Operation sind somit irrelevant für die Decodierung und brauchen somit vom Demodulator nicht explizit berechnet werden. $\wp \vec{e}_\mu$ bzw. $\wp \vec{s}_\mu$ bezeichnen dabei die Projektionen der Amplitudenwerte \vec{e}_μ bzw. \vec{s}_μ auf den D -komplex-dimensionalen Teilraum.

2.4.2 Viterbi-Algorithmus

Zur Decodierung werden keine redundanten Daten verwendet. Daher berücksichtigen wir nur die D -komplex-dimensionalen Projektionen $\wp \vec{e}_\mu$ des Vektors \vec{e}_μ . Zur Vereinfachung der Darstellung verwenden wir eine einfache Zuordnung ($v = 1, \gamma = \mu$). Der Viterbi Algorithmus nutzt die 1 – 1 Korrespondenz zwischen $\langle \vec{q}_\gamma \rangle$ und $\langle \vec{c}_\gamma \rangle$ bzw. $\langle \vec{s}_\gamma \rangle$ um den Pfad mit der größten Streuwahrscheinlichkeit $P(\langle \vec{e}_\gamma \rangle | \langle \vec{s}_\gamma \rangle)$ zu bestimmen. Weiterhin ist jeder Trellisschritt im Kanalencoder statistisch unabhängig vom vorherigen (begründet durch die Eigenschaft der Quellensymbolsequenz 2.14) und die Koeffizienten des Störsignals in

zeitlicher Richtung sind ebenfalls statistisch unabhängig (gedächtnisloser Kanal). Somit gilt die Faktorisierung:

$$P(\langle \varphi \vec{e}_\gamma \rangle | \langle \vec{q}_\gamma \rangle) = \max_{\forall \langle \vec{q}_\gamma \rangle} \lim_{K \rightarrow \infty} \prod_{\gamma=-\infty}^K P(\langle \varphi \vec{e}_\gamma \rangle | \langle \vec{q}_\gamma \rangle) \quad (2.27)$$

$$= \max_{\forall \langle \vec{q}_\gamma \rangle} \lim_{K \rightarrow \infty} P(\varphi \vec{e}_K | S_{K+1}, S_K, \vec{q}_K) P(\langle \varphi \vec{e}_\gamma \rangle_{-\infty}^{K-1} | \langle \vec{q}_\gamma \rangle_{-\infty}^{K-1}, S_K) \quad (2.28)$$

Der letzte Term beschreibt die Streuwahrscheinlichkeit der Sequenz bis zum Zeitpunkt $K-1$ die im Zustand S_K endet. $P(\varphi \vec{e}_K | S_{K+1}, S_K, \vec{q}_K)$ bezeichnet die Steuwahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustand S_K zum Zustand S_{K+1} über den von \vec{q}_K gewählten Zweig.

Im nächsten Schritt versuchen wir, mögliche Vorabentscheidungen zu treffen:

$$P(\langle \varphi \vec{e}_\gamma \rangle | \langle \vec{q}_\gamma \rangle) = \lim_{K \rightarrow \infty} \max_{\forall S_{K+1}} \max_{\forall S_K, \vec{q}_K} \left[P(\varphi \vec{e}_K | S_{K+1}, S_K, \vec{q}_K) \left\{ \max_{\forall \langle \vec{q}_\gamma \rangle_{-\infty}^{K-1}} P(\langle \varphi \vec{e}_\gamma \rangle_{-\infty}^{K-1} | \langle \vec{q}_\gamma \rangle_{-\infty}^{K-1}, S_K) \right\} \right] \quad (2.29)$$

Der letzte maximierte Term repräsentiert die Z bedingt wahrscheinlichsten Pfade, die im Schritt $(K-1)$ zu den Z Zuständen führen. (breite Zweige in Abbildung 2.8). Die zweite max-Operation sucht nun den Z bedingt wahrscheinlichsten Pfad, der in den Zustand S_{K+1} mündet. Dabei wird derjenige gewählt, der die größte Streuwahrscheinlichkeit

$$P(\langle \varphi \vec{e}_\gamma \rangle_{-\infty}^K | \langle \vec{q}_\gamma \rangle_{-\infty}^K, S_{K+1})$$

besitzt. Schließlich kann derjenige Pfad gewählt werden, der im Zustand S_{K+1} endet und die größte Streuwahrscheinlichkeit besitzt.

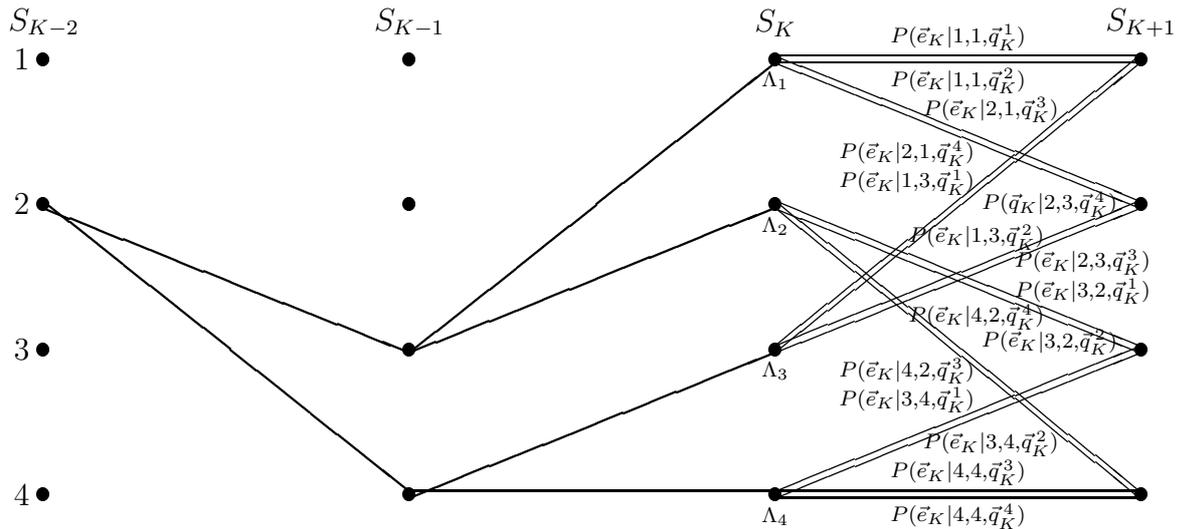


Abbildung 2.8: Sequenzschätzung beim Viterbi-Algorithmus

Zur Vereinfachung der Berechnung weisen wir nun den Zweigen eine Länge

$$\lambda_{S_\gamma S_{\gamma+1}}(\varphi \vec{e}_\gamma, \vec{q}_\gamma) = -\ln P(\varphi \vec{e}_\gamma | S_{\gamma+1}, S_\gamma, \vec{q}_\gamma) \quad (2.30)$$

zu. [10] Der wahrscheinlichste Pfad besitzt nun auch das Attribut des kürzesten Pfades, denn der Logarithmus ist eine monotone Funktion. Für Gleichung 2.29 gilt dann somit:

$$-\ln P(\langle \wp \vec{e}_\gamma \rangle | \widehat{\langle \vec{q}_\gamma \rangle}) = \lim_{K \rightarrow \infty} \min_{\forall S_{K+1}} \min_{\forall S_K, \vec{q}_K} \left[\lambda_{S_K S_{K+1}}(\wp \vec{e}_K, \vec{q}_K) + \Lambda_{S_K} \right] \quad (2.31)$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \min_{\forall S_{K+1}} \Lambda_{S_{K+1}} \quad (2.32)$$

mit

$$\Lambda_{S_{K+1}} = \min_{\forall S_K, \vec{q}_K} \left[\lambda_{S_K S_{K+1}}(\wp \vec{e}_K, \vec{q}_K) + \Lambda_{S_K} \right] \quad (2.33)$$

Λ_{S_K} ist die akkumulierte Pfadlänge der Z bedingt wahrscheinlichsten Pfade, die im Schritt $K - 1$ zu den Z Zuständen S_K führen.

Für den zeitdiskreten Kanal ergibt sich die Länge eines Zweiges aus der quadratischen Euklidischen Distanz zwischen projiziertem Empfangsamplitudenwert $\wp \vec{e}_\gamma$ und Sendeamplitudenwert $\wp \vec{s}_\gamma$:

$$\lambda_{S_\gamma S_{\gamma+1}}(\wp \vec{e}_\gamma, \vec{q}_\gamma) = \frac{1}{\sigma^2} d_E^2(\wp \vec{e}_\gamma, \tilde{f}(S_\gamma, \vec{q}_\gamma)) + D \ln(\pi \sigma^2) \quad (2.34)$$

$\tilde{f}(S_\gamma, \vec{q}_\gamma) = \wp \vec{s}_\gamma$ ist die mit dem Mapping verknüpfte Ausgangsfunktion der Finite State Machine. Die Konstante $D \ln(\pi \sigma^2)$ bzw. der Faktor $\frac{1}{\sigma^2}$ haben keinen Einfluß auf die Entscheidungsregel und können daher bei der Auswertung weggelassen werden.

Die Regel zur Berechnung der akkumulierten Pfadlänge der Z bedingt wahrscheinlichsten Pfade $\Lambda_{S_{K+1}}$ aus Λ_{S_K} läßt sich noch vereinfachen, wenn vorab der kürzeste aller parallelen Zweige zwischen den Zuständen S_K und S_{K+1} bestimmt wird:

$$\Lambda_{S_{K+1}} = \min_{\forall S_K} \left[\Lambda_{S_K} + \min_{\forall \vec{q}_K} \lambda_{S_K S_{K+1}}(\wp \vec{e}_K, \vec{q}_K) \right] \quad (2.35)$$

Diese Gleichung beschreibt nun den Viterbi-Algorithmus:

- *Addiere* zur akkumulierten Pfadlänge des Pfades der zum Zustand S_K führt die minimale Zweiglänge aller parallelen Zweige, die zum Zustand S_{K+1} führen.
- *Vergleiche* alle akkumulierten Pfadlängen, die in den Zustand S_{K+1} führen.
- *Wähle* den Zweig (\widehat{S}_K, S_{K+1}) zum Zustand S_{K+1} , dessen akkumulierte Pfadlänge in diesem Zustand minimal ist.

Kapitel 3

Kriterien zur Bewertung von Trelliscodes

Im Rahmen der Untersuchung punktierter Trelliscodes scheinen Bewertungskriterien wie Leistungseffizienz bei gegebener Modulationsrate, Komplexität des Codes, und Flexibilität beim Austausch zwischen Fehlerrate und Modulationsrate notwendig zu sein um Aussagen über diese Klasse von Trelliscodes treffen zu können. Diese Kriterien werden im folgenden vorgestellt.

3.1 Leistungseffizienz und Modulationsrate

Die Leistungseffizienz eines codierten Modulationsverfahren kennzeichnet sich durch die Fehlerrate (Bitfehlerrate, Symbolfehlerrate, Rate der Fehlerereignisse) bei gegebenem Störabstand $\frac{E_b}{N_0}$. Der Leistungseffizienzvergleich zwischen codierten Modulationsverfahren ist nur dann aussagekräftig, wenn die Verfahren die gleiche Modulationsrate R_m aufweisen.

3.2 Komplexität des Codes

Die Komplexität eines Trellis Codes wird definiert durch die zur Decodierung notwendigen Operationen eines trellisbasierten Decodier-Algorithmus [9]. Der Decodier-Algorithmus besteht aus einem konventionellen Viterbi-Algorithmus und einer Maximum Likelihood Symbol Schätzung der Coset Elemente. Der Viterbi-Algorithmus addiert die Zweiglängen für jeden Zustand und zustand-verlassenden Zweig und vergleicht – durch Differenzbildung – die akkumulierten Längen für jeden Zustand. Die *Add, Compare, Select (ACS)* Operation wird in jedem Trellisschritt durchgeführt. Zur Schätzung des wahrscheinlichsten Coset Elements werden die Metrikwerte für alle Elemente des geschätzten Cosets verglichen.

Normiert wird auf die Rate der Quellensymbolsequenz und komplexe Dimensionen [9], wobei der zu betrachtende Signalraum der $2D$ -reell-dimensionale Euklidische Raum mit Euklidischer Metrik ist.

Operationen werden nach Additionen und Multiplikationen unterteilt. Die Operation der Multiplikation wird durch den Faktor m gegenüber der Addition gewichtet. Für konkrete

Betrachtungen setzen wir $m = 1$ mit der Begründung, daß die Komplexität der Multiplikation kein primärer Einflußfaktor für die Komplexitätsbetrachtungen des Decodieralgorithmus darstellt.

3.3 Flexibilität beim Austausch zwischen Fehlerrate und Modulationsrate

Die mittlere Rate der Modulation R_m für binäre Quellsymbole ist nach [13]:

$$R_m = \frac{T}{T_q} \quad (3.1)$$

Bei v -facher Zuordnung benötigt man $v \cdot ld(M)$ Bits für einen Codesymbolblock, der in vT Zeiteinheiten moduliert wird. Durch die Codierung werden r Redundanzbits pro Codierintervall T_c hinzugefügt. Somit müssen $v \cdot ld(M) - r$ Bits für einen Quellsymbolblock in $(v \cdot ld(M) - r)T_q$ Zeiteinheiten von der Quelle zur Verfügung gestellt werden. Somit gilt:

$$vT = (v \cdot ld(M) - r)T_q$$

und für die Modulationsrate erhält man

$$R_m = ld(M) - \frac{r}{v} \quad (3.2)$$

Die Stufenzahl M bestimmt somit primär die Modulationsrate. Die hinzugefügten Redundanzbits pro Codierintervall T_c verringern somit nur die maximal mögliche Modulationsrate. Eine mehrfache Zuordnung hat nur begrenzten Einfluß auf die Modulationsrate und ermöglicht keine Rate größer als $ld(M)$.

Wird nun die Varianz der Signalpunkte in der Signalkonstellation auf $\mathcal{E} \{ |\bar{s}^{(i)}|^2 \} = 1$ normiert, so verringert sich die Euklidische Distanz zwischen den Signalpunkten bei Vergrößerung der Stufenzahl M . Dies hat einen Einfluß auf die Fehlerrate. Somit ergibt sich die Frage nach der Flexibilität der Struktur des Trelliscoders hinsichtlich der Veränderung der Stufenzahl.

Kapitel 4

Konstruktion eines Trelliscodes

4.1 Konstruktion nach Ungerböck

Ungerböck hat in seinen Arbeiten gezeigt, wie es möglich ist, Trelliscodes nach bestimmten Konstruktionsregeln zu finden:

- Zuordnung binärer Labels zu den Signalpunkten der Signalkonstellation durch Partitionierung der Signalmenge,
- Codierung der binären Labels durch einen binären Faltungscoder der Rate $\frac{n}{n+1}$, dessen Trellis auch parallele Übergänge aufweisen kann.

Im weiteren betrachten wir zur Verdeutlichung ein Beispiel der 32Cross Signalkonstellation.

4.1.1 Bestimmung des Mappings durch Partitionierung der Signalmenge

Die 32-Cross Signalkonstellation ist vom Typ eines \mathcal{Z}^2 -Gitters. Dabei ist ein \mathcal{Z}^2 -Gitter eine unendliche Punktmenge im 2-dimensionalen Raum mit äquidistanten Abständen zwischen den Punkten in jeder Dimension. Dieser Abstand Δ_0 ist auch der minimale Euklidische Abstand zweier benachbarter Punkte.

Diese Signalmenge wird nun binär partitioniert, d.h. in jedem Partitionierungsschritt wird eine Teilsignalmenge wiederum in zwei Teilsignalmengen aufgeteilt, wobei der minimale Euklidische Abstand zwischen den Punkten der neuen Teilmenge Δ_{i+1} größer sein soll als der ursprünglichen Teilsignalmenge Δ_i . Für das \mathcal{Z}^2 -Gitter gilt:

$$\Delta_{i+1} = \sqrt{2}\Delta_i \quad \forall i \geq 0$$

(Analoge Überlegungen führen im Fall des \mathcal{Z} -Gitters auf $\Delta_{i+1} = 2\Delta_i$.) Durch die binäre Partitionierung entsteht somit ein Bi-Baum, in dem aus einem Knoten zwei neue Knoten hervorgehen. Für das \mathcal{Z}^2 -Gitter ist diese Partitionierung unendlich fortführbar. Da aber

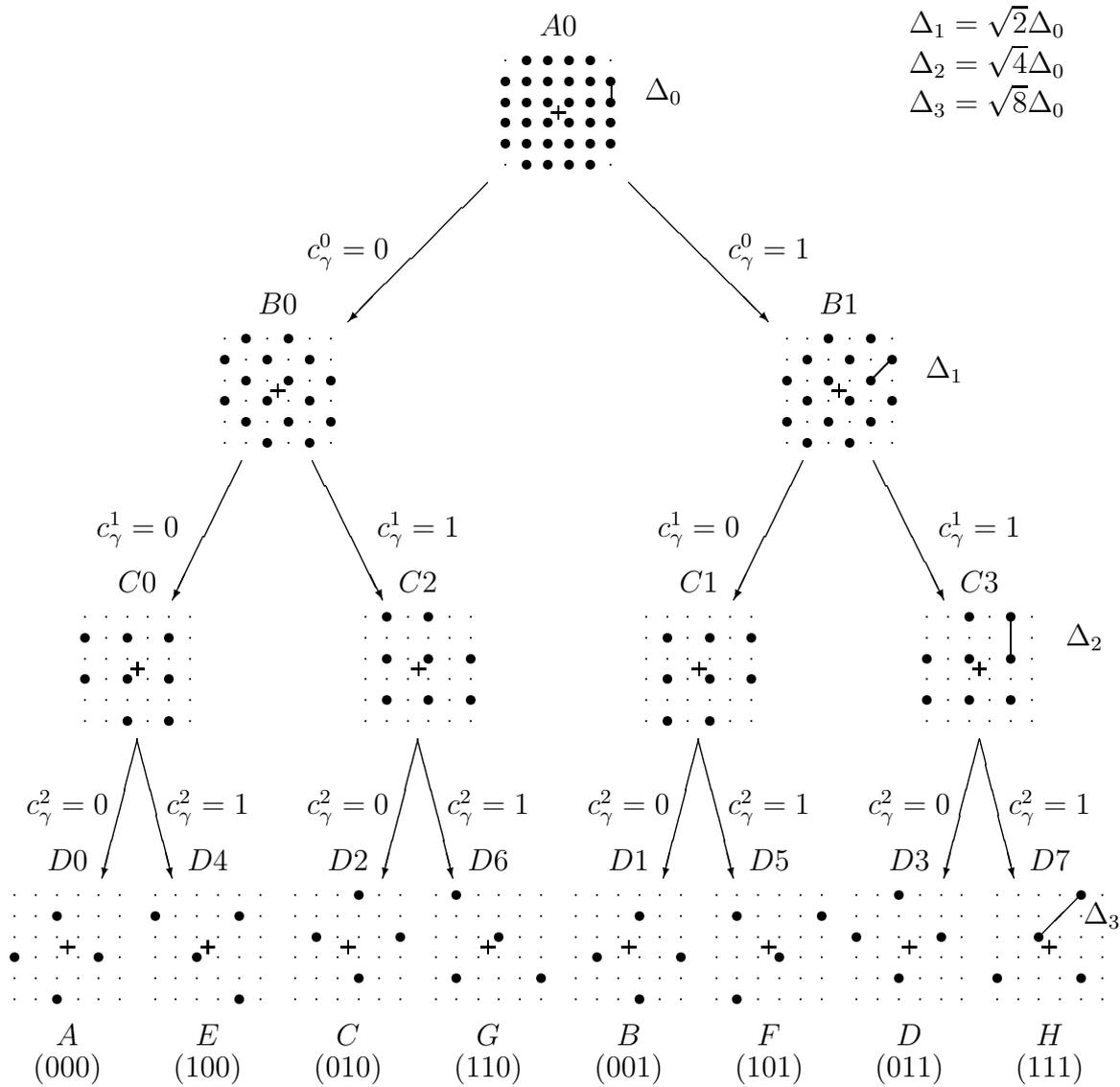


Abbildung 4.1: $\mathbb{Z}^2/2R\mathbb{Z}^2$ Partitionierung der 32CROSS Signalkonstellation

die 32Cross Signalkonstellation 2^5 Signalpunkte enthält, bricht die binäre Partitionierung nach fünf Schritten ab; für die minimale Euklidische Distanz Δ_{i+1} zwischen den Punkten der Teilmenge gilt nur noch

$$\begin{aligned} \Delta_{i+1} &= \sqrt{2}\Delta_i & \text{für } i = 0, 1, 2 \\ \Delta_{i+1} &\geq \Delta_i & \text{für } i = 3, 4 \end{aligned}$$

Diese binäre Partitionierung des \mathbb{Z}^2 -Gitters beschreibt man auch durch die Partitionierungskette $\mathbb{Z}^2/R\mathbb{Z}^2/R^2\mathbb{Z}^2/R^3\mathbb{Z}^2/\dots$ [9]. R beschreibt dabei den Partitionierungsschritt durch die Abbildung der Teilmenge \mathcal{L}_i auf die Teilmenge $\mathcal{L}_{i+1} = R\mathcal{L}_i$. Diese Abbildung hat dabei die Eigenschaft, daß durch zweifache Anwendung die ursprüngliche Teilmenge in ihrer Struktur wieder entsteht, aber die minimale Euklidische Distanz benachbarter Punkte sich um den Faktor 2 vergrößert:

$$\mathcal{L}_{i+2} = 2\mathcal{L}_i$$

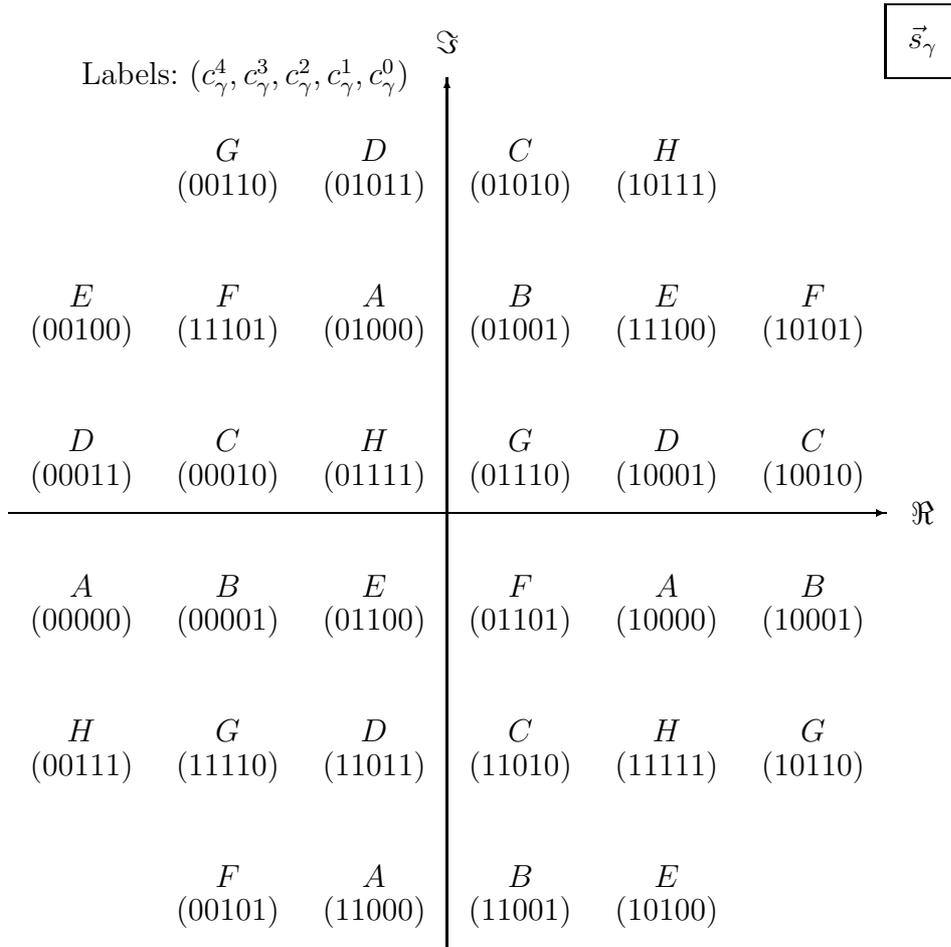


Abbildung 4.2: Labeling der 32Cross Signalkonstellation

Die binäre Partitionierung des \mathbb{Z}^2 -Gitters ordnet jedem Binärsymbol des Codesymbols eine Euklidische Distanz zu, d.h. bei Verfälschung des Binärsymbols c_γ^i liegen die beiden Punkte, die sich um dieses Bit unterscheiden um den Abstand Δ_i auseinander.

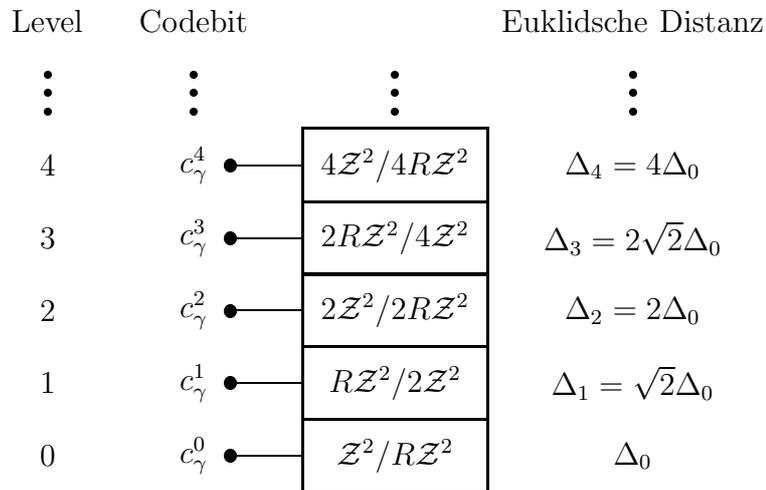


Abbildung 4.3: Partitionierungskette und Codebit-Levels

$\frac{h_E^2(\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j)}{\Delta_0^2}$	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	1	2	1	4	1	2	1
B	1	0	1	2	1	4	1	2
C	2	1	0	1	2	1	4	1
D	1	2	1	0	1	2	1	4
E	4	1	2	1	0	1	2	1
F	1	4	1	2	1	0	1	2
G	2	1	4	1	2	1	0	1
H	1	2	1	4	1	2	1	0

Tabelle 4.1: Wechselseitige Distanzen der Teilmengen aus der $\mathbb{Z}^2/2R\mathbb{Z}^2$ Partitionierung

Daraus ergibt sich intuitiv, daß Levels, denen eine geringe Euklidische Distanz in jedem Modulationsschritt zugeordnet wird, durch eine Codierung in zeitliche Richtung eine effektiv größere Euklidische Distanz zugeordnet werden muß.

4.1.2 Der Optimale Coder

Die Trellisstruktur eines Codes erlaubt nun eine Einteilung der Fehlerereignisse (siehe Kapitel 2.3.1) in zwei Grundarten: (Abbildung 4.4)

- Fehlerereignisse der Länge $\epsilon = 1$; sie sind gekennzeichnet durch parallele Übergänge im Trellis,
- Fehlerereignisse der Länge $\epsilon > 1$

Da es möglich ist, diesen Fehlerereignissen eine *Pfadlänge* zuzuordnen (siehe Kapitel 2.4.2), betrachten wir nun die Pfadlänge eines solchen Fehlerereignisses, dessen Beginn beliebig, z.B. bei $\gamma = 0$, eintritt:

$$L_\epsilon = \sum_{\gamma=0}^{\epsilon-1} d(\vec{c}_\gamma, \widehat{\vec{c}}_\gamma) \tag{4.1}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\epsilon-1} d_E^2(\vec{s}_\gamma, \widehat{\vec{s}}_\gamma) \tag{4.2}$$

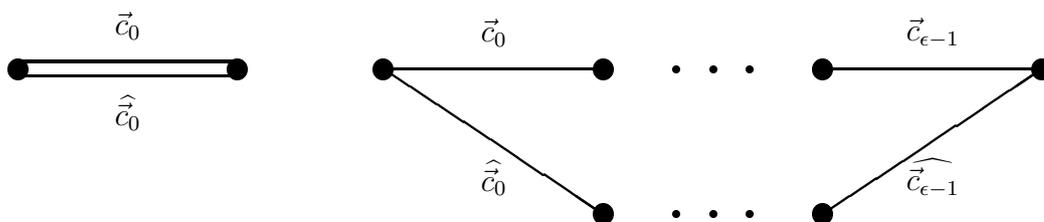


Abbildung 4.4: Fehlerereignisarten im Trellis

Somit legt die Trellisstruktur fest, welche Art der Fehlerereignisse und deren Häufigkeit auftreten. Die Zuordnung der Zweiglänge in Form von quadratischen Euklidischen Distanzen legt dann die *Pfadlänge* der einzelnen Fehlerereignisse fest.

Die Leistungsfähigkeit eines Codes bestimmt in erster Näherung die kürzeste Pfadlänge eines Fehlerereignisses $d_{E,free}^2$ – die kürzeste gewichtete Länge eines Fehlerereignisses – und deren Anzahl N_{free} . Deshalb suchen wir nach der kürzesten Pfadlänge aller möglichen Fehlerereignisse der Länge eins und größer als eins:

$$d_{E,free}^2 = \min \left\{ \min_{\forall \epsilon=1} L_\epsilon, \min_{\forall \epsilon>1} L_\epsilon \right\} \quad (4.3)$$

Parallele Übergänge werden durch Codebits bestimmt, die ohne Einfluß durch Gedächtniszustände direkt aus dem aktuellen Quellensymbolblock hervorgehen. Man spricht auch von uncodierten Levels.

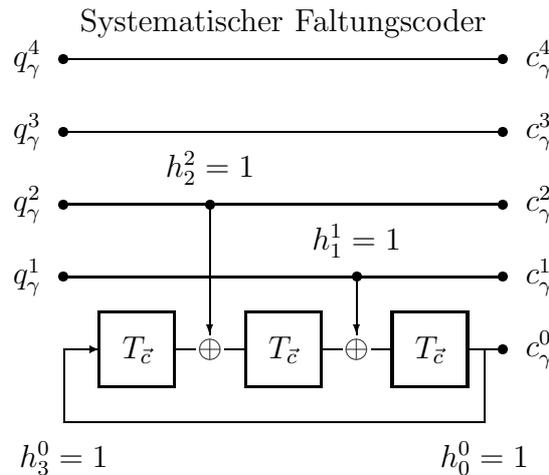


Abbildung 4.5: Realisierung des Faltungscodes und Koeffizienten der Prüfmatrix

Werden also nun Modulationsverfahren betrachtet, die den Typ \mathcal{Z}^2 -Gitter verwenden und die drei codierte Levels aufweisen ($\mathcal{Z}^2/R\mathcal{Z}^2/2\mathcal{Z}^2/2R\mathcal{Z}^2$), so werden die kürzesten Pfadlängen eines Fehlerereignisses beschränkt durch Fehlerereignisse der Länge eins:

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 &< d_{E,free}^2 \leq \Delta_3^2 \\ 4 &< \frac{d_{E,free}^2}{\Delta_0^2} \leq 8 \end{aligned}$$

Innerhalb diesem Intervall können nun Faltungscoder der Rate $\frac{2}{3}$ dimensioniert werden. Der Faltungscoder kann durch die Prüfgleichung [19]

$$\bigoplus_{i=0}^k \bigoplus_{\nu=0}^p h_\nu^i \odot c_{p-\nu}^i = 0 \quad (4.4)$$

beschrieben und durch die Koeffizienten der Prüfmatrix h_ν^i bestimmt werden. k ist die Anzahl der vom Faltungscoder zu codierenden Bits und $2^p = Z$ die Zustandszahl. Für die gewünschte Leistungsfähigkeit der Codes im oben angegebenen Intervall sind für den Faltungscoder in minimaler Struktur 8 - 512 Zustände notwendig. Die von Ungerböck gefundenen Koeffizienten sind in Tabelle 4.2 zusammengefaßt. [19] Zu bemerken ist, daß für

$$\frac{d_{E,free}^2}{\Delta_0^2} = 4$$

zwei codierte Levels genügen.

Z	k	Prüfmatrix- koeffizienten			$\frac{d_{E,free}^2}{\Delta_0^2}$	$G_{Asymptodisch}$ [dB]			$Cod./$ $Uncod.$	N_{free}
		h_ν^2	h_ν^1	h_ν^0		16QAM/ 8PSK $R_c = 3$	32CR/ 16QAM $R_c = 4$	64QAM/ 32CR $R_c = 5$		
4	1	–	2	5	4.0	4.36	3.01	2.80	3.01	4
8	2	04	02	11	5.0	5.33	3.98	3.77	3.98	16
16	2	16	04	23	6.0	6.12	4.77	4.56	4.77	56
32	2	10	06	41	6.0	6.12	4.77	4.56	4.77	16
64	2	064	016	101	7.0	6.79	5.44	5.23	5.44	56
128	2	042	014	203	8.0	7.37	6.02	5.81	6.02	344
256	2	304	056	401	8.0	7.37	6.02	5.81	6.02	44
512	2	0510	0346	1001	8.0	7.37	6.02	5.81	6.02	4

 Tabelle 4.2: Ungerböck Codes für Z^2 Signalkonstellationen

4.2 Darstellung der Beurteilungskriterien für Ungerböck-Codes

Im folgenden werden Simulationsergebnisse verwendet, die mit der Ungerböck'schen Konstruktionsmethode erhalten wurden.

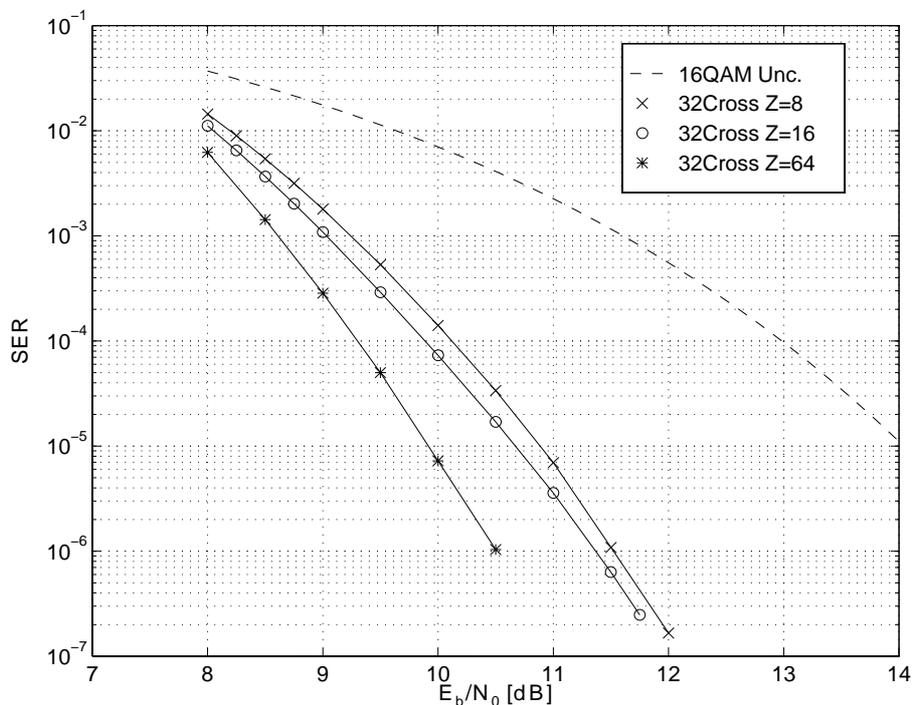


Abbildung 4.6: Symbolfehlerrate für Ungerböck-Codes

Zur Darstellung der Leistungseffizienz wird die 32Cross Signalkonstellation mit der Zuordnung nach Abbildung 4.2. verwendet. Verglichen werden die drei Faltungscoder mit 8, 16, und 64 Zuständen. Die verwendete Struktur ist für 8 Zustände in Abbildung 4.5

dargestellt. Pro Modulationsintervall T werden 4 Informationsbit übertragen ($R_m = 4$). Zur Referenz wurde das uncodierte 16QAM Modulationsverfahren angegeben. Ein Symbolfehler wird dann gezählt, wenn ein oder mehr Bits des 4-stelligen Quellensymbolblocks durch die Störung verfälscht werden. Im weiteren werden die Randbedingungen des Modells nach Kapitel 2 berücksichtigt.

Für die Komplexitätsbetrachtung verwenden wir das Modell des Encoders wie in Abbildung 4.7 beschrieben. Der Trellis Encoder strukturiert sich wie folgt: k Bits werden vom Faltungscoder mit Z Zuständen berücksichtigt, der r Redundanzbits hinzufügt. $k + r$ Bits wählen nun die Teilmenge, wobei $n - k$ uncodierte Bits einen Signalpunkt aus dieser Teilmenge adressieren.

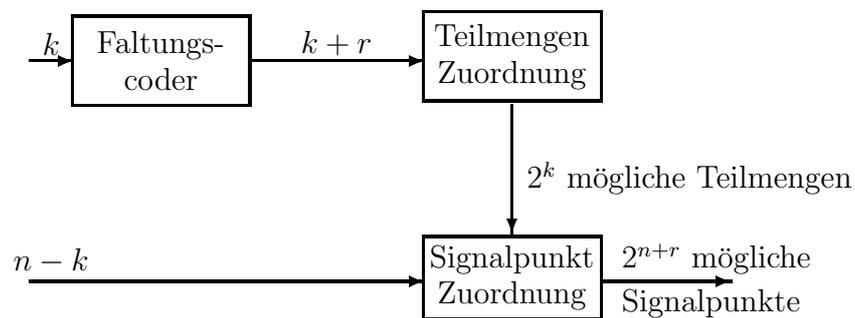


Abbildung 4.7: Encoder für Teilmengencodes

Jeder Modulationsschritt ist auch ein Trellisschritt. 2^{n+r} Zweiglängen sind aus der Signalkonstellation zu berechnen, wobei jedes innere Produkt in $2D + m2D + (2D - 1)$ Additionen zerlegt wird. Dabei ist $2D$ die reelle Dimension des Untersignalraumes. $2^{n-k} - 1$ Vergleiche sind für jeden der 2^{k+r} Teilmengen notwendig, wodurch auch der optimale Signalpunkt je Teilmenge festgelegt wird. $Z(2^{k+1} - 1)$ Additionen benötigt die ACS Operation.

Nach Normierung ergibt sich:

$$A_U := \frac{Z(2^{k+1} - 1) + 2^{n+r}(2 + m)2D - 2^{k+r}}{nD} \quad (4.5)$$

Z	A_U	$G_{32Cr 16QAM}$ [dB]
4	50	3.01
8	60	3.98
16	74	4.77
32	102	4.77
64	158	5.44
128	270	6.02
256	494	6.02
512	942	6.02

Tabelle 4.3: Codierungsgewinn und Komplexität

Die Komplexität ist relativ zu einem Leistungsparameter des Trelliscodes aussagekräftig. Wir wählen hier den asymptotischen Codierungsgewinn in Bezug auf ein uncodiertes

Modulationsverfahren mit identischer Rate. Die Anzahl der kürzesten Fehlerereignisse, N_{free} (im Sinne der kürzesten Pfadlänge) wird vernachlässigt. Unter Verwendung der Ergebnisse mit $n = 4, D = 1, m = 1$, ergibt sich Tabelle 4.3.

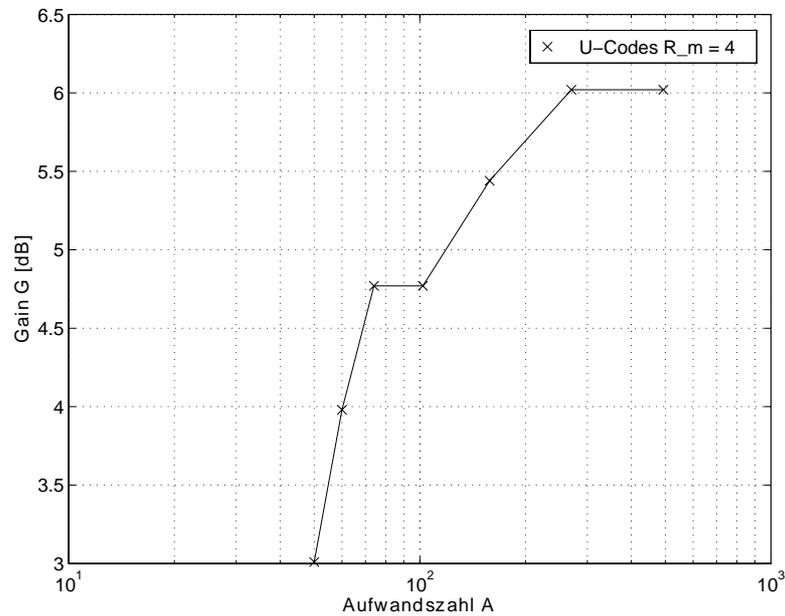


Abbildung 4.8: *Codierungsgewinn im Vergleich zur Komplexität*

Zum Schluß betrachten wir die Flexibilität zwischen Fehlerrate und Modulationsrate.

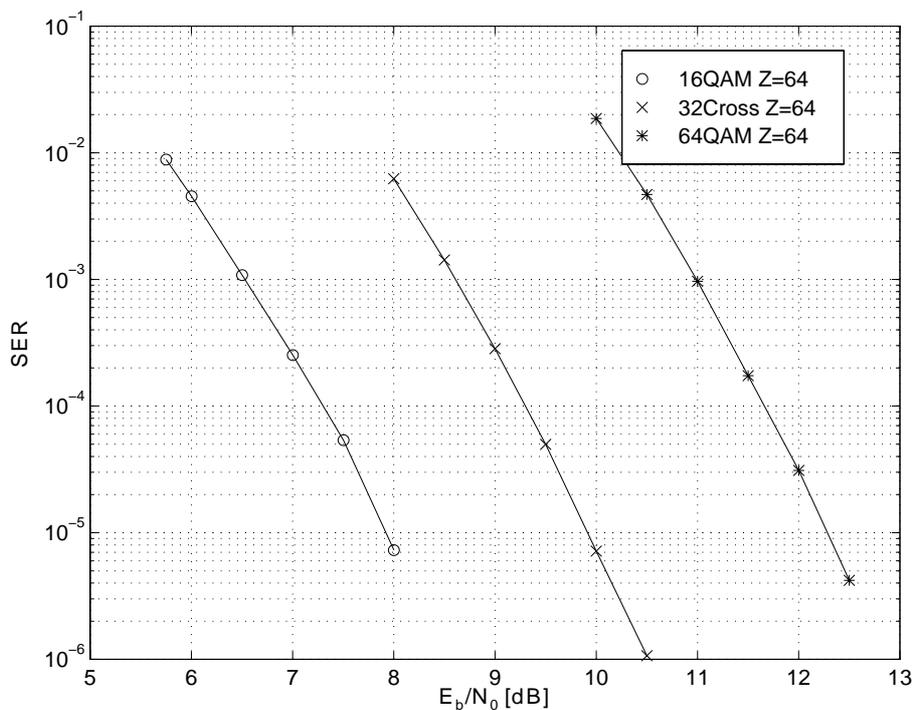


Abbildung 4.9: *Fehlerrate und Flexibilität der Modulation*

Ungerböck wählt nun eine einfache Zuordnung und $r = 1$, d.h. eine Redundanzbit pro Codierintervall $T_{\bar{c}}$.

$$R_m = ld(M) - 1$$

Ungerböck-Codes haben bei gleicher Zustandszahl den gleichen Faltungscodes für alle Signalkonstellationen, die aus \mathcal{Z}^2 -Gittern hervorgehen. Durch Vergrößerung der Signalmenge und Partitionierung können somit uncodierte Levels hinzugefügt werden, ohne die Optimalität des Codes zu beeinträchtigen. Die Modulationsrate ist somit flexibel im Bereich der ganzen Zahlen: $R_m = 2, 3, 4, 5, \dots$

Zur Verdeutlichung stellen wir in Abbildung 4.9 die codierte 16QAM, 32Cross, 64QAM gegenüber und verwenden dabei den Ungerböck-Code mit 64 Zuständen ($d_{E,free}^2 = 7\Delta_0^2$, $N_{free} = 56$, siehe Tabelle 4.2).

Die normierte minimale quadratische Euklidische Distanz [13]

$$d_{min}^2 = \frac{d_{E,free}^2}{2\mathcal{E}\{|\bar{s}^{(i)}|^2\}} R_m \quad (4.6)$$

gibt Auskunft über die Leistungseffizienz des Trelliscodes und ist auf die Varianz der Signalkonstellation normiert. Aus Tabelle 4.4 ergibt sich der flexible Austausch zwischen der normierten Euklidischen Distanz d_{min}^2 – einem Leistungsparameter – und der Modulationsrate R_m bei gleichem Faltungscodes.

	16QAM	32Cross	64QAM
$\frac{\mathcal{E}\{ \bar{s}^{(i)} ^2\}}{\Delta_0^2}$	$\frac{M-1}{6} = \frac{5}{2}$	5	$\frac{M-1}{6} = \frac{21}{2}$
R_m	3	4	5
d_{min}^2	4.2	2.8	1.67

Tabelle 4.4: Flexibilität der Modulationsrate

Kapitel 5

Punktierte Trelliscode

5.1 Einführung

Trelliscodierte Modulationsverfahren können durch den Viterbi-Algorithmus decodiert werden, wenn die Modellrahmenbedingungen nach Kapitel 2 erfüllt werden. Nun sind aber 2^n Entscheidungen hinsichtlich der Pfadlänge pro Zustand zu treffen, wenn der Trelliscoder die Rate $\frac{n}{n+1}$ besitzt. k Levels werden aber nur codiert und deswegen sind 2^{n-k} Entscheidungen pro Trellisschritt (2^{n-k} parallele Zweige für ein zulässiges Zustandspaar (S_K, S_{K+1})) sofort möglich. (Siehe Abschnitt 2.4.2) k Labels bedeuten aber 2^k ACS-Operationen pro Zustand und Trellisschritt für den Viterbi-Algorithmus, da 2^k nicht-parallele Zweige jeden Zustand verlassen. Diese Anzahl kann auf $2k$ reduziert werden, wenn dieser Trellisschritt in k Trellisschritte zerlegt wird. In diesem Trellis verlassen 2 nicht-parallele Zweige jeden Zustand.

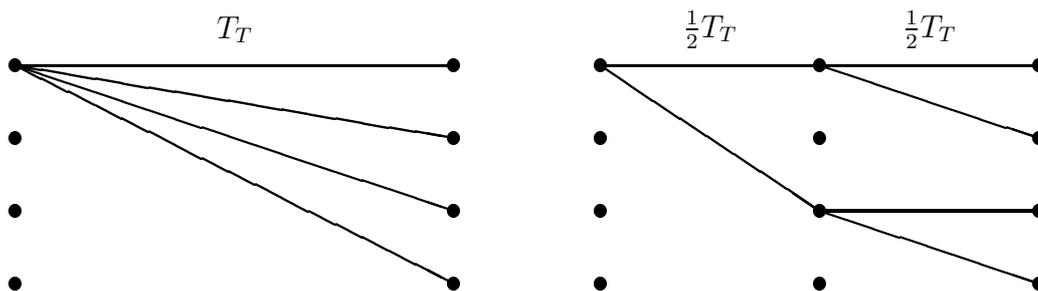


Abbildung 5.1: *Beispiel: Zerlegung eines Trellis: $k = 2$*

Verwendet man nun Coder der Rate $\frac{1}{2}$, so können äquivalente Coder der Rate $\frac{k}{2k}$ realisiert werden. Streicht man nun von den $2k$ Bits $k - r$ Bits, so spricht man von einem punktierten Coder der Rate $\frac{k}{k+r}$. Dadurch wird aus dem zeitinvarianten Coder, der einen Quellensymbolblock in T_T Zeiteinheiten verarbeitet ein periodisch zeitvarianter Coder, der in den Zeitintervallen $\frac{T_T}{k}$ getaktet wird.

Um bei der Decodierung auch diesen punktierten Coder einsetzen zu können, muß man in jedem Zeitintervall $\frac{T_T}{k}$ ein ACS-Zyklus beim Viterbi-Algorithmus möglich sein. Dieser trifft dann eine optimale Entscheidung, wenn jedes codierte Bit unkorreliert aus einer reellen

Dimension des zeitdiskreten Empfangssignals $\langle \varrho \vec{e}_\gamma \rangle$ gewonnen wird. Die Bedingungen für die Trellisstruktur bzw. für das Mapping werden im weiteren untersucht.

Wir betrachten einen Trelliscode mit Signalkonstellationen vom Typ \mathcal{Z}^2 -Gitter und im besonderen die 32Cross Signalkonstellaton, wie in [15] vorgeschlagen.

Für Signalkonstellationen vom Typ \mathcal{Z}^2 -Gitter und $\frac{d_{E,free}^2}{\Delta_0^2} \leq 4$ genügen 2 codierte Levels und somit ein Coder der Rate $\frac{1}{2}$ für den optimalen Ungerböck-Code. (Siehe Tabelle 4.2) Für höhere minimale quadratische Euklidische Distanzen bis zu $d_{E,free}^2 = 8\Delta_0^2$ sind Coder der Rate $\frac{2}{3}$ für den optimalen Code notwendig.

5.2 Trellisstruktur für punktierte Coder

Wir beginnen mit einem Vergleich zum systematischen Faltungscoder der Rate $\frac{2}{3}$. Zwei Eingangsbits haben Einfluß auf die Gedächtnisstruktur der Finite-State-Machine und erzeugen das Redundanzbit, daß die Signalkonstellaton in 2 Teilmengen teilt; siehe Abbildung 5.2

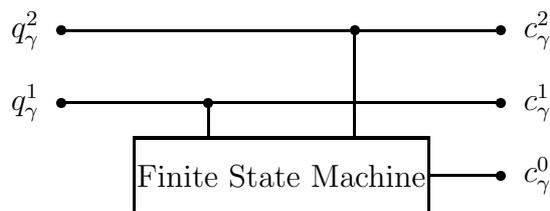


Abbildung 5.2: *Finite State Machine und Punktierung*

Die Finite State Machine ändert ihre Zustände in jedem Intervallschritt $T_{\tilde{c}}$. Verwenden wir aber nun einen punktierten Faltungscoder, so ändern sich die Zustände im Zeittakt $\frac{T_{\tilde{c}}}{2}$. Das Redundanzbit c_γ^0 ist nur nach jedem zweiten Taktschritt $\frac{T_{\tilde{c}}}{2}$ zu bestimmen. Der Wert des Redundanzbits gibt also Auskunft über die Zustandsänderungen, die sich über zwei Intervalle der Länge $\frac{T_{\tilde{c}}}{2}$ ereignen.

Somit teilt dieses Bit im Intervall $T_{\tilde{c}}$ die Trellisstruktur in zwei Teile, die wir als *Gruppe0* ($c_\gamma^0 = 0$) und *Gruppe1* ($c_\gamma^0 = 1$) kennzeichnen. Die Trellisstruktur, beschrieben durch die Zustandsübergänge, teilen wir derart, daß die Menge der Zustände $\mathcal{S}_{\kappa+1}$ in zwei disjunkte Teilmengen $\mathcal{S}_{\kappa+1}^0$ und $\mathcal{S}_{\kappa+1}^1$ aufgeteilt wird:

$$\mathcal{S}_{\kappa+1} = \{S_{\kappa+1} | S = 1, 2, \dots, Z\} \quad \mathcal{S}_{\kappa+1}^0 \cap \mathcal{S}_{\kappa+1}^1 = \emptyset \quad (5.1)$$

Alle Pfadstücke $(S_\kappa, S_{\kappa+1})$, die durch die Teilmenge der Zustände $\mathcal{S}_{\kappa+1}^l$ führen, werden somit durch das Redundanzbit c_γ^0 geschützt. Dem Wert weisen wir den Index der Teilmengen zu:

$$c_\gamma^0 = l \quad (5.2)$$

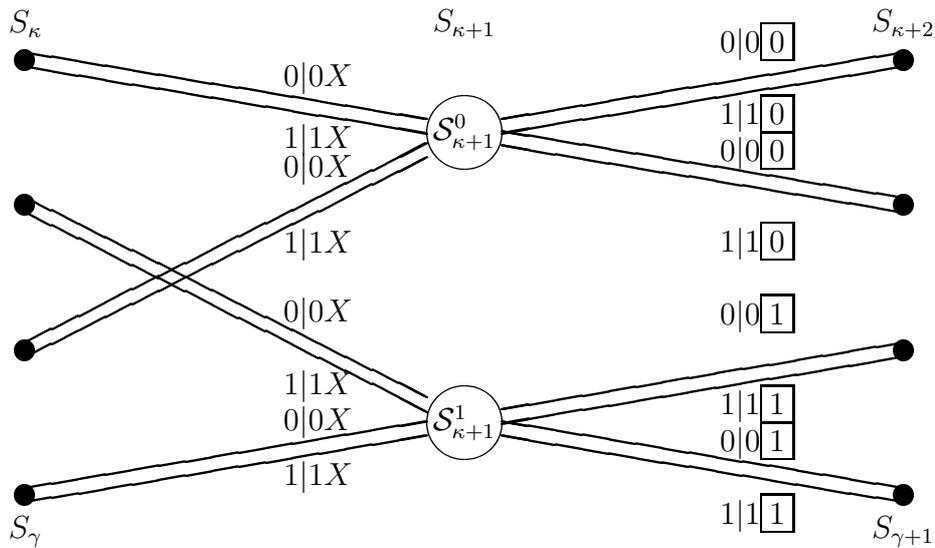


Abbildung 5.3: *Teilung der Trellisstruktur*

Die für die Kanalcodierung redundante Information beschränkt sich somit auf die Information, durch welche Zustandsmenge $\mathcal{S}_{\kappa+1}^l$ das betrachtete Pfadstück (eindeutig festgelegt durch die Quellensymbole q_{γ}^i) läuft.

Für die weiteren Betrachtungen benennen wir das Intervall von $[0, \frac{1}{2}T_{\bar{c}}[$ mit *Ersten Schritt*, bzw. das Intervall von $[\frac{1}{2}T_{\bar{c}}, T_{\bar{c}}[$ mit *Zweiten Schritt*. Im *Ersten Schritt* betrachten wir alle möglichen Zweige $(S_{\kappa}, S_{\kappa+1})$, und im *Zweiten Schritt* alle möglichen Zweige $(S_{\kappa+1}, S_{\kappa+2})$.

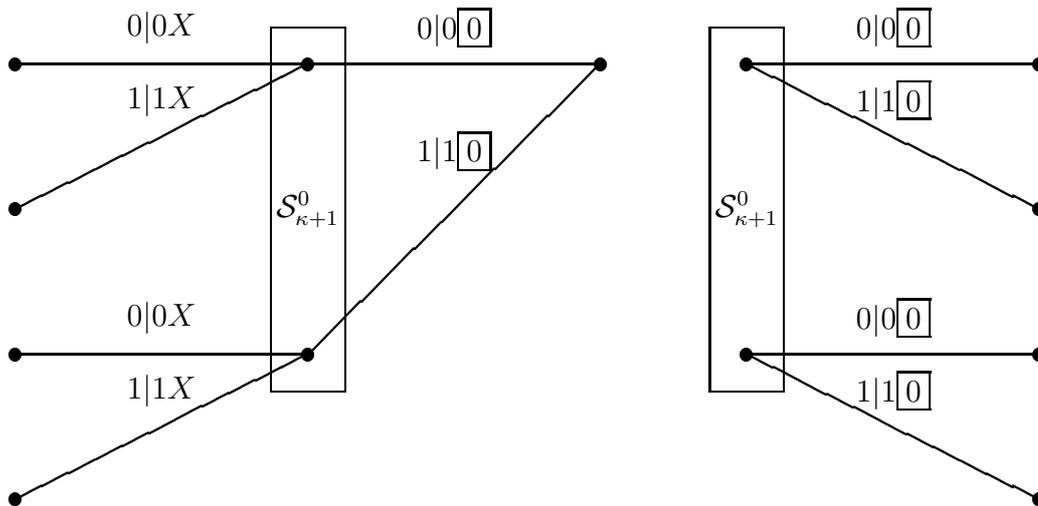


Abbildung 5.4: *Anforderungen an die Trellisstruktur punktierter Faltungscoder*

Aus den oben angeführten Überlegungen ergeben sich nun folgende Bedingungen für die Trellisstruktur punktierter Faltungscoder:

Bedingung 1: Zweigen, die im *Ersten Schritt* in einen der Zustände der Klasse $\mathcal{S}_{\kappa+1}^l$ führen, schließen sich nur Zweige im *Zweiten Schritt* an, deren zweites Bit den Wert l besitzt.

Bedingung 2: Alle Zweige, die im *Zweiten Schritt* Zustände der Klasse $\mathcal{S}_{\kappa+1}^l$ verlassen, besitzen als zweites Bit den Wert l .

Abbildung 5.4 verdeutlicht die Bedingungen für die Trellisstruktur.

5.3 Das Punktierungsmuster

Da nach der zweiten Bedingung das zweite Codebit im *Zweiten Schritt* identisch ist, darf das erste Codebit im *Zweiten Schritt* nicht identisch sein. Somit ist eine Punktierung im *Zweiten Schritt* ausgeschlossen; die Information des zweiten Bits im *Zweiten Schritt* soll übertragen werden.

Die Bedingung 2 fordert im speziellen für die Zweige, die den gleichen Zustand im *Zweiten Schritt* verlassen, daß das zweite Codebit den gleichen Wert besitzt. Die Eigenschaften des Coders der Rate $\frac{1}{2}$ sind aber in beiden Schritten gleich. Dadurch ist es möglich, das zweite Bit im *Ersten Schritt* zu streichen. Es hat zwar ähnliche Eigenschaften wie das zweite Bit im *Zweiten Schritt*, doch gibt es nicht explizit die Art der Gruppe an. Siehe als Beispiel Abbildung 5.10.

5.4 Die Zuordnung und die Metrikberechnung

Analog der Aufteilung der Trellisstruktur teilen wir auch die Signalkonstellation in zwei Gruppen. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, daß die k Informationsbits, die Einfluß auf die Finite State Machine haben, zueinander unkorreliert bleiben, damit später bei der Decodierung unabhängig entschieden werden kann. Wir wählen somit pro reeller Dimension eine $\mathcal{Z}/2\mathcal{Z}$ Partitionierung und bilden das Kreuzprodukt dieser eindimensionalen Gitter:

$$2\mathcal{Z}^k = \times_{\kappa=1}^k 2\mathcal{Z} \quad (5.3)$$

Dies bezeichnen wir als die Separabilitätsbedingung. Für die weiteren Betrachtungen und zur Veranschaulichung wählen wir $k = 2$. Für das Modell des Encoders wählen wir die systematische Struktur nach Abbildung 5.2.

Das Codebit c_γ^1 wählt nun eines der zwei Cosets der $\mathcal{Z}/2\mathcal{Z}$ Partitionierung in einer reellen Dimension im Signalraum. Das gleiche gilt für das Codebit c_γ^2 , jedoch für eine reelle Dimension, die orthogonal dazu ist. Da wir zwei Gruppen haben, ergeben sich zwei Signalsräume, deren Basen wir mit

$$\underline{U}^0 = \begin{pmatrix} \underline{u}_1^0 \\ \underline{u}_2^0 \end{pmatrix} \quad \underline{U}^1 = \begin{pmatrix} \underline{u}_1^1 \\ \underline{u}_2^1 \end{pmatrix}$$

für *Gruppe0* bzw. für *Gruppe1* kennzeichnen.

Coset A^l und Coset B^l liegen also auf dem \mathcal{Z} -Gitter in Richtung \underline{u}_1^l und werden festgelegt durch c_γ^1 . Diese zwei Gitter müssen noch zu einem zusammengefaßt werden. Dies geschieht durch Superposition der linear transformierten Konstellationen für *Gruppe0* und *Gruppe1*:

$$\vec{s} = \underline{s}^0 \underline{U}^0 + \vec{t}^0 + \underline{s}^1 \underline{U}^1 + \vec{t}^1 \quad (5.4)$$

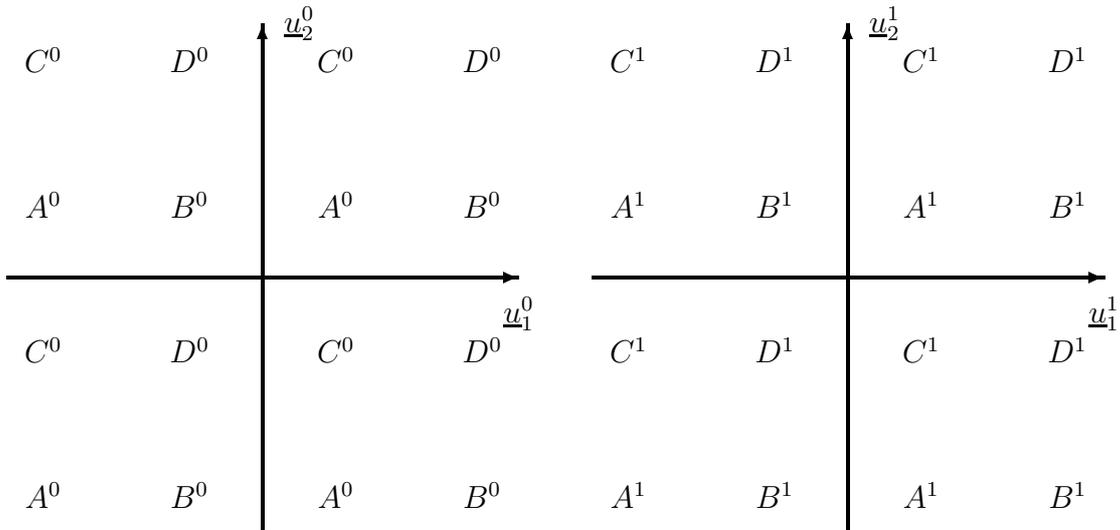


Abbildung 5.5: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der zwei Gruppen

Teilmenge	c_γ^2	c_γ^1
A^l	0	0
B^l	0	1
C^l	1	0
D^l	1	1

l	c_γ^0	Gruppe	KOS
0	0	Gruppe0	\underline{U}^0
1	1	Gruppe1	\underline{U}^1

Tabelle 5.1: Abkürzungen der durch die Codebits adressierten Teilmengen

\underline{s}^l sind die Komponenten der Basis \underline{U}^l und \vec{t}^l bezeichnet einen Translationsvektor. Die genaue Art der Transformation ergibt sich aus den Betrachtungen zur Metrikberechnung, die nun folgt.

Die Streuwahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustand S_κ zu $S_{\kappa+2}$ lautet wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben

$$P(\wp \vec{e}_\gamma) | S_{\kappa+2}, S_{\kappa+1}, S_\kappa, q_\kappa^1, q_\kappa^2, \mathcal{S}_{\kappa+1}^l$$

Sie hängt nun auch von der Zustandsteilmenge $\mathcal{S}_{\kappa+1}^l$ ab, durch die der Pfad läuft.

Anstelle komplexer Werte betrachten wir nun zweidimensionale reelle Werte. Unter der Bedingung, daß wir wissen durch welche Zustandsteilmenge $\mathcal{S}_{\kappa+1}^l$ der Pfad läuft, können wir mit

$$\vec{s} = \underline{s}^l \underline{U}^l + \vec{t}^l \tag{5.5}$$

$$\wp \vec{e} = \underline{e}^l \underline{U}^l + \vec{t}^l \tag{5.6}$$

$$\tag{5.7}$$

die Verteilungsdichtefunktion der Streuwahrscheinlichkeiten umformen:

$$f_{\underline{e}^l | \underline{s}^l}(\underline{y}^l | \underline{x}^l) = \sqrt{\det(\underline{U}^l \underline{U}^{lT})} \frac{1}{\pi \sigma^2} e^{-\frac{1}{\sigma} (\underline{e}^l - \underline{s}^l) \underline{U}^l \underline{U}^{lT} (\underline{e}^l - \underline{s}^l)^T} \tag{5.8}$$

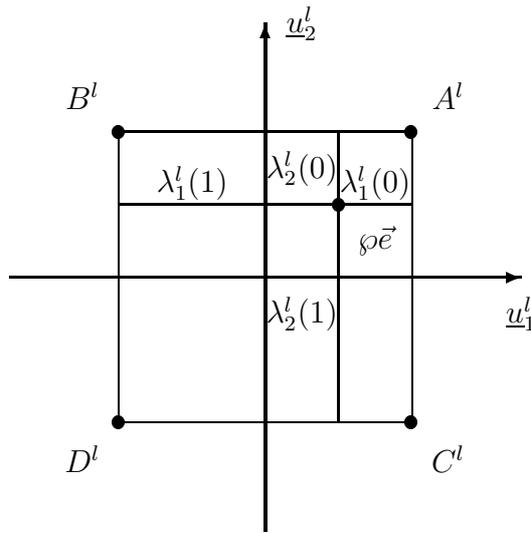


Abbildung 5.6: Bestimmung der Zweiglängen aus der projizierten Signalkonstellation

\underline{U}^l sein nun eine unitäre Transformation d.h.

$$\underline{U}^l \underline{U}^{lT} = I \quad (5.9)$$

I bezeichnet die Einheitsmatrix. Wir können nun die reelle zweidimensionale Verteilungsdichtefunktion faktorisieren. Der Zählindex i kennzeichnet die reelle Dimension.

$$f_{\underline{e}^l | \underline{s}^l}(\underline{y}^l | \underline{x}^l) = \prod_{i=1}^2 f_{\underline{e}_i^l | \underline{s}_i^l}(y_i^l | x_i^l) \quad (5.10)$$

$$f_{\underline{e}_i^l | \underline{s}_i^l}(y_i^l | x_i^l) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{e}_i^l - \underline{s}_i^l)^2} \quad (5.11)$$

Somit ergibt sich für die Pfadlänge der einzelnen Zweige im punktierten Trellis je nach Gruppe

$$\lambda_1^l(q_\gamma^1) = \lambda_{S_{\kappa+1} S_{\kappa+2}}(\varphi \vec{e}_\gamma, q_\gamma^1) \quad \text{mit } S_{\kappa+1} \in \mathcal{S}_{\kappa+1}^l \quad (5.12)$$

$$= (\underline{e}_1^l - \underline{s}_1^l)^2 \quad \text{mit } \underline{e}_1^l - \underline{s}_1^l = (\varphi \vec{e} - \vec{s}) \bullet \underline{u}_1^l \quad (5.13)$$

$$\lambda_2^l(q_\gamma^2) = \lambda_{S_\kappa S_{\kappa+1}}(\varphi \vec{e}_\gamma, q_\gamma^2) \quad \text{mit } S_{\kappa+1} \in \mathcal{S}_{\kappa+1}^l \quad (5.14)$$

$$= (\underline{e}_2^l - \underline{s}_2^l)^2 \quad \text{mit } \underline{e}_2^l - \underline{s}_2^l = (\varphi \vec{e} - \vec{s}) \bullet \underline{u}_2^l \quad (5.15)$$

Abbildung 5.6 veranschaulicht die Pfadlängen der einzelnen Zweige je nach Gruppe l .

Schließlich bestimmen wir die Matrix der unitären Transformation um die endgültige Signalkonstellation angeben zu können:

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1^0 \\ \underline{u}_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{u}_1^l \\ \underline{u}_2^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Für die Decodierung ist somit wichtig, welcher Gruppe der gerade betrachtete Zweig angehört. Je nach Gruppenzugehörigkeit werden andere Zweiglängen zugeordnet. Somit ist der Viterbi-Algorithmus leicht zu modifizieren.

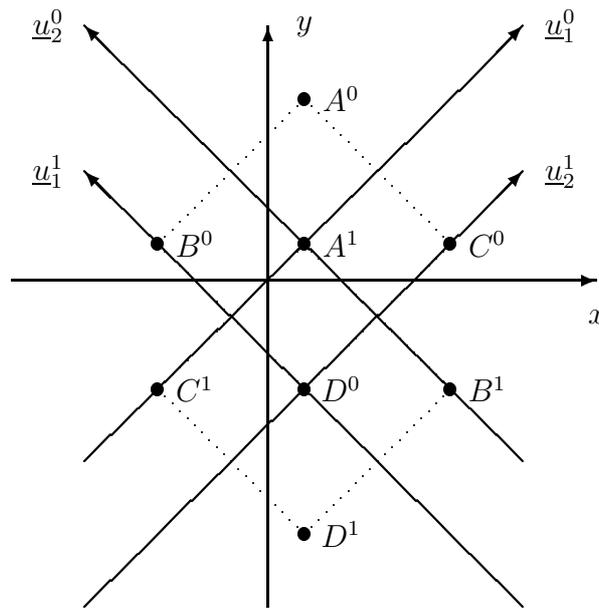


Abbildung 5.7: Superposition der beiden Signalkonstellationen

5.5 Realisierung punktierter Trelliscodes

Die Realisierung des punktierten Trelliscodes erfolgt wie in Abbildung 5.8 beschrieben. Dabei werden die uncodierten Levels in der Blockteilung abgespalten. Die Blockwandlung setzt die Taktrate um und die Punktierungsmatrix streicht die nicht benötigten Redundanzbits.

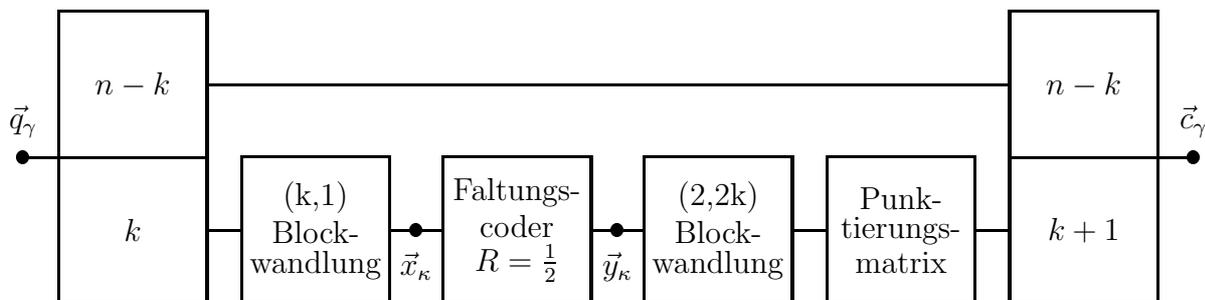


Abbildung 5.8: Realisierung des punktierte Trelliscodes

Z	Prüfmatrix		PTCM-Codes		Ungerböck-Codes	
	h_ν^1	h_ν^0	$\frac{d_{E,free}^2}{\Delta_0^2}$	N_{free}	$\frac{d_{E,free}^2}{\Delta_0^2}$	N_{free}
8	04	15	5.0	16	5.0	16
16	10	23	6.0	56	6.0	56
32	04	57	6.0	16	6.0	16
64	020	123	7.0	48	7.0	56

Tabelle 5.2: Punktierte Trelliscodes für Z^2 Signalkonstellationen

Die Koeffizienten (oktal) der Prüfmatrix der Faltungscoder der Rate $\frac{1}{2}$ werden in Tabelle

5.2 zusammenfaßt und aus den Generatorcoeffizienten in [15] bestimmt. Als Beispiel verwenden wir zur Realisierung der systematischen Struktur die Koeffizienten der Prüfmatrix aus Tabelle 5.2.

$$(y^1, y^0) = x^1 \left(1, \frac{D^2}{D^3 \oplus D^2 \oplus 1} \right)$$

Die Struktur ist in Abbildung 5.9 dargestellt und durch die Koeffizienten an den entsprechenden Stellen ergänzt.

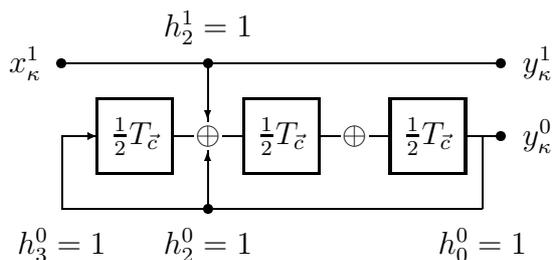


Abbildung 5.9: Realisierung des Faltungscodes und Koeffizienten der Prüfmatrix

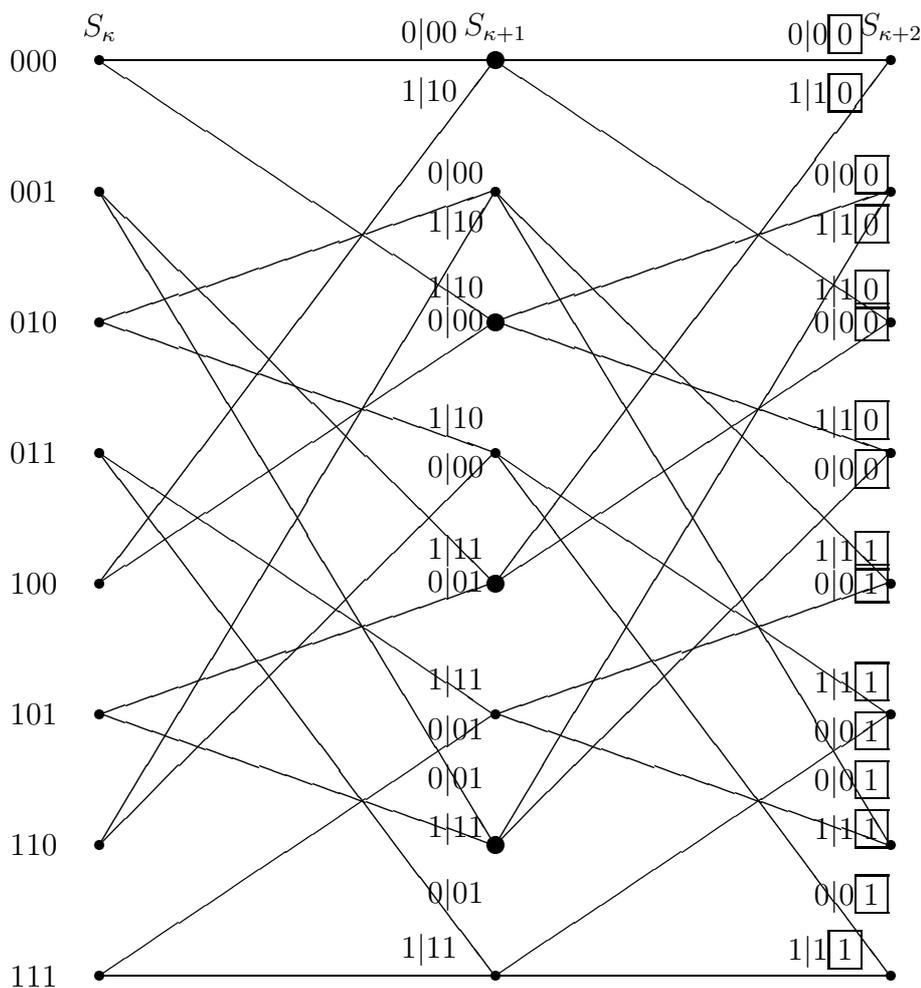


Abbildung 5.10: Trellisdiagramm für den punktierten Trelliscode

In Abbildung 5.10 wird das Trellisdiagramm des systematischen Faltungscoders aus Abbildung 5.9 dargestellt. Die Zweige wurden mit dem Eingangsbit bzw. den Ausgangsbits gekennzeichnet. Die Zustände der Teilmenge $\mathcal{S}_{\kappa+1}^0$ sind durch breitere Punkte dargestellt.

5.6 Vergleich anhand der Leistungseffizienz

Die Simulationsergebnisse in Abbildung 5.11 zeigen, daß der Code genauso leistungsfähig ist wie der Ungerböck-Code mit gleicher Zustandszahl, wenn nach jedem zweiten Trellis-schritt im punktierten Trellis entschieden wird.

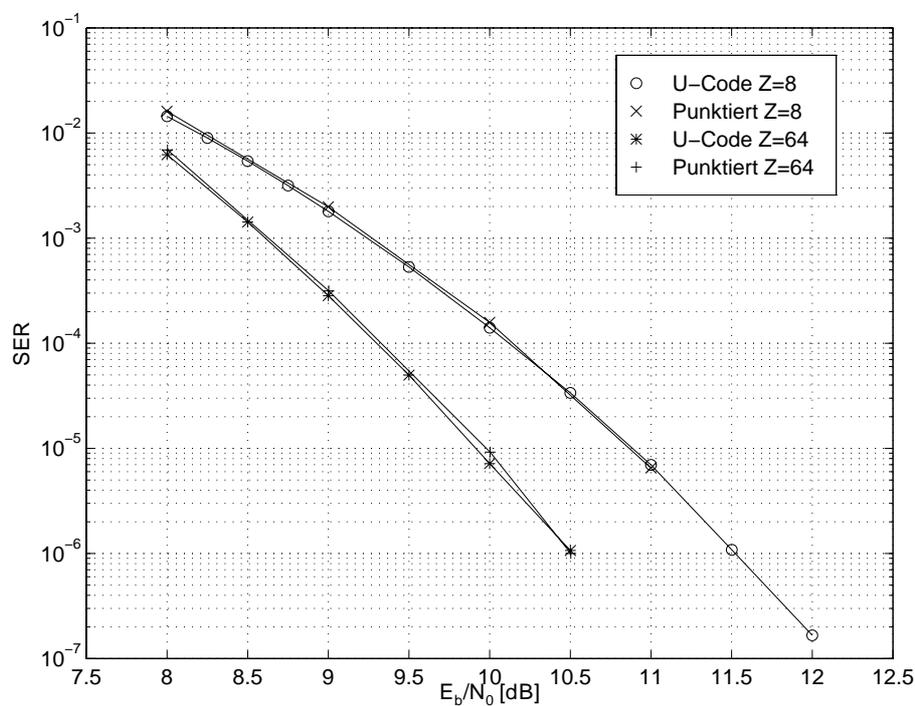


Abbildung 5.11: Leistungseffizienz der punktierten Codes

Das Ungerböck'sche Modulationsverfahren verbessert seine Leistungsfähigkeit bei endlichen Signalkonstellationen durch die Randeffekte, d.h. die fehlenden nächsten Nachbarn am Rande der endlichen Signalkonstellation. Die dargestellte Methode für punktierte Trelliscodes kann die Randeffekte nicht im gleichen Maße nutzen wie die Ungerböck'sche Methode. Abbildung 5.12 zeigt die Leistungseinbuße durch die Decodiermethode punktierter Trelliscodes. Für hohe Störabstände verschwindet diese Leistungseinbuße.

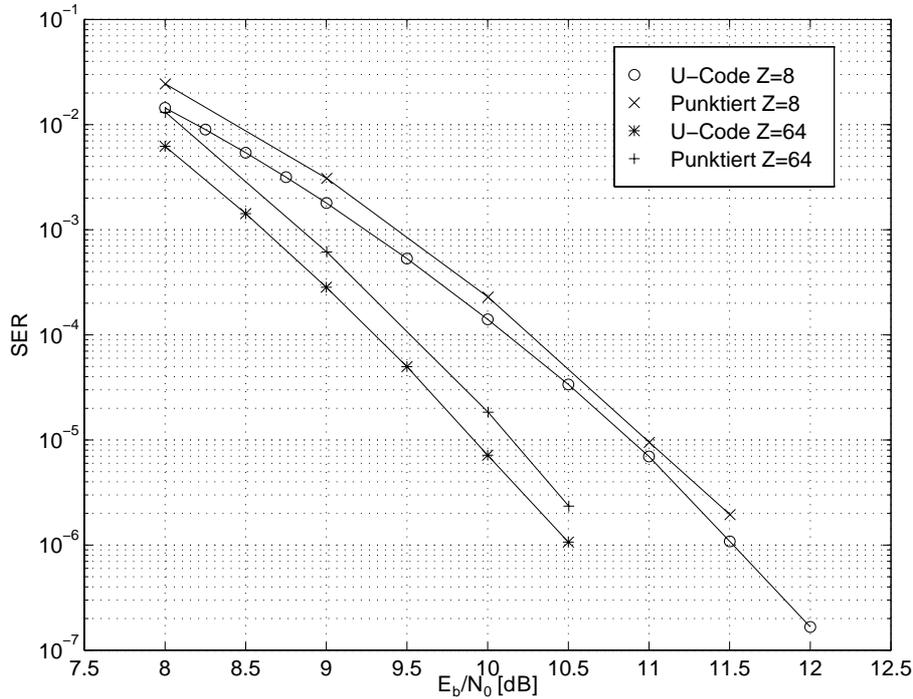


Abbildung 5.12: Degradierung der Leistungseffizienz durch die Decodiermethode punktierter Trelliscodes

5.7 Vergleich anhand der Komplexität

Vorausgesetzt wird hier ein Elementar-Faltungscoder der Rate $\frac{1}{2}$, punktiert zu einem Faltungscoder der Rate $\frac{k}{k+r}$, d.h. der Elementar-Faltungscoder arbeitet im k -fachen Takt im Vergleich zum äquivalenten unpunktierten Faltungscoder der Rate $\frac{k}{k+1}$. Notwendige Bedingung für die Konstruktion ist die Ungleichung der Dimensionalität der Signalkonstellation: $D \geq 2k$.

Jeder Modulationsschritt besteht aus k Trellisschritten. 2^{n+1} Distanzen sind aus der Signalkonstellation zu berechnen, wobei jedes innere Produkt in $(2+m)2D - 1$ Additionen zerlegt wird. $2^{n-k} - 1$ Vergleiche sind für jeden der 2^{k+1} Cosets notwendig, wodurch auch der optimale Signalpunkt je Coset festgelegt wird. Für jede der 4 Zweigmetriken ist die Differenz zwischen empfangenem Signal und nächstem Punkt eines ausgewählten Cosets zu bestimmen ($2D$ Additionen), eine Projektion auf eine ON-Basis zu berechnen ($m(2D)^2$ Additionen) und aus den Komponenten der ON-Basis die Metriken festzulegen (mk Additionen). Schließlich sind für jeden Trellisschritt und Zustand 2 Additionen der Zweiglängen und 1 Vergleich der akkumulierten Längen durchzuführen. Nach Normierung ergibt sich:

$$A_{OP} := \frac{3Zk + 4(2D + m(2D)^2 + mk) + 2^{n+1}(2+m)2D - 2^{k+1}}{nD} \quad (5.17)$$

Unter Verwendung der Ergebnisse mit $n = 4$, $D = 1$, $m = 1$, ergibt sich Tabelle 5.3.

Z	A_{OP}	$G_{32Cr 16QAM}$ [dB]
8	66	3.98
16	78	4.77
32	102	4.77
64	150	5.44

Tabelle 5.3: Codierungsgewinn und Komplexität für optimal punktierte Trelliscodes

Beim Vergleich in Abbildung 5.13 wurde für den asymptotischen Codierungsgewinn die entsprechenden Ungerböckschen Codierungsgewinne verwendet, da nach Abbildung 5.11 ähnliche Leistungseffizienz vorliegt.

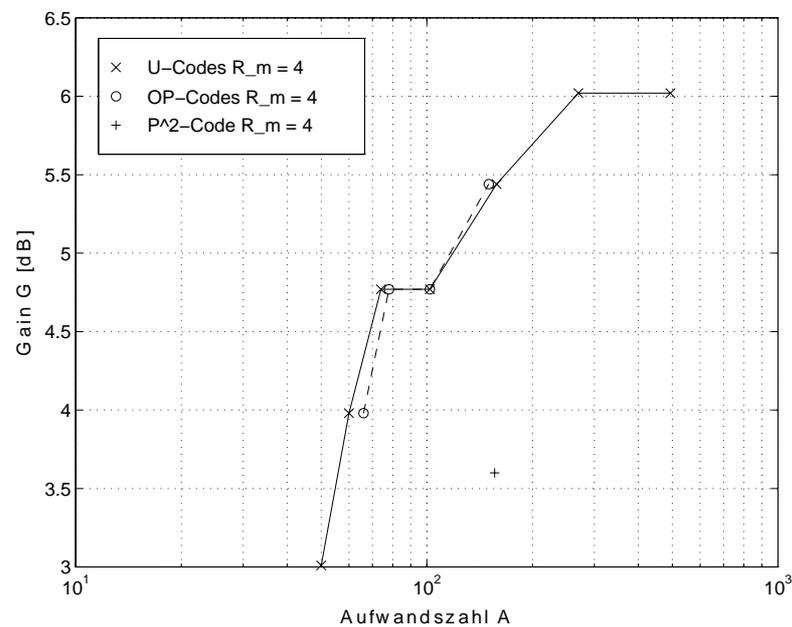


Abbildung 5.13: Codierungsgewinn im Vergleich zur Komplexität: optimale punktierte Trelliscodes

5.8 Flexible Anpassung

Die Hardware-Implementierung der Rate $\frac{1}{2}$ Faltungscoder mit frei programmierbaren Prüfkoeffizienten würde eine Realisierung der flexiblen Klasse von Trelliscodes ermöglichen. Die Leistungsfähigkeit ist fast identisch mit denen der Ungerböck-Codes und für höhere Raten als $\frac{2}{3}$ ergeben sich noch Komplexitätsvorteile.

Kapitel 6

Pragmatische Trelliscodes

6.1 Einführung

Pragmatische Trelliscodes werden in [20] eingeführt um den Quasi-Standard Faltungscoder der Rate $\frac{1}{2}$ mit 64 Zuständen auch für Trelliscodierte Modulationsverfahren zu verwenden. Die Darstellung des rückkopplungsfreien Coders mittels Generatorpolynome lautet wie folgt:

$$(b^1, b^0) = a^0(D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus 1, D^6 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus D \oplus 1) \quad (6.1)$$

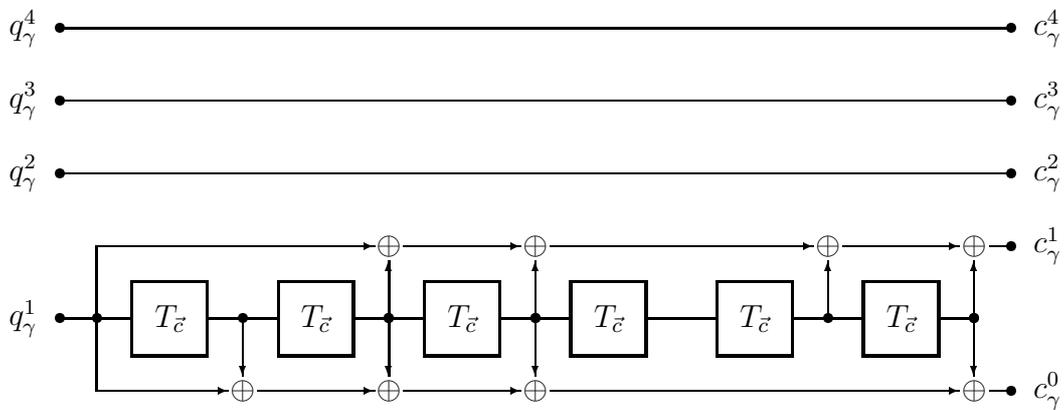


Abbildung 6.1: Realisierung des pragmatischen Coders

Diese Präferenz beruht auf der bereits vorliegenden Hardware-Realisierung des Viterbi-Algorithmus für diesen Quasi-Standard Faltungscoder. Die Koeffizienten der Generatorpolynome wurden aber nach der Hammingdistanz optimiert; die minimale Hammingdistanz dieses Faltungscoders beträgt $d_{H,free} = 10$.

Ein Beispiel für die pragmatische Trelliscodierung ist die Verwendung der $\mathcal{Z}^2/2\mathcal{Z}^2$ Partitionierung der 32-Cross Signalkonstellation, wobei nur zwei Levels codiert werden. [22]. Mit $q_\gamma^1 = b_\gamma^1$ und $c_\gamma^1 = b_\gamma^1$ bzw. $c_\gamma^0 = b_\gamma^0$ ergibt sich nach Abbildung 6.1 die Struktur des

Trelliscoders. Die entsprechende Signalkonstellation bzw. die Zuordnung ist in Abbildung 6.2 dargestellt.

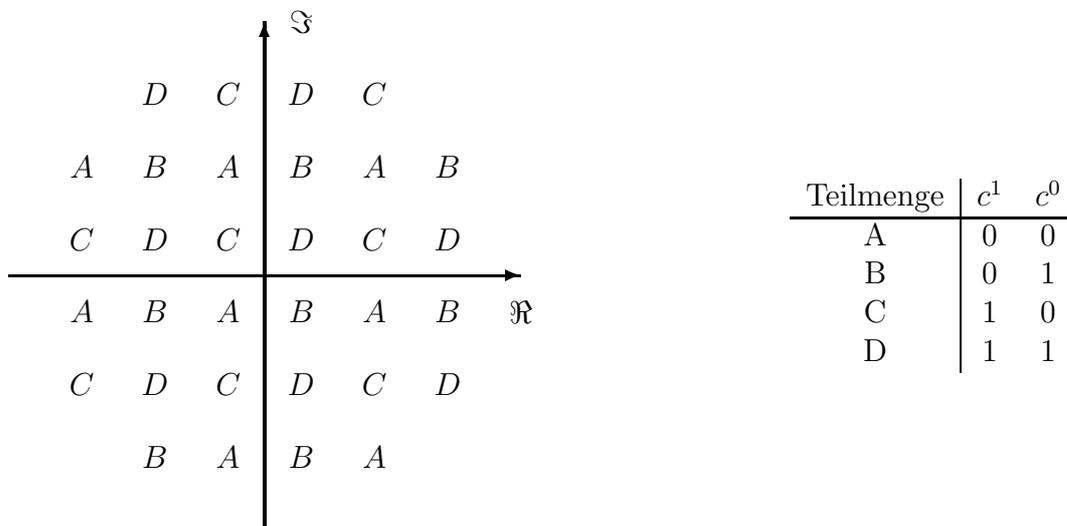


Abbildung 6.2: 32-Cross Signalkonstellation und Zuordnung der Binärsymbole

Die minimale quadratische Euklidische Distanz für diesen Code beträgt nach [9]:

$$d_{E,free}^2 = \min\{4\Delta_0^2, 10\Delta_0^2\} = 4\Delta_0^2$$

und ist somit vergleichbar mit dem des Ungerböck-Codes mit 4 Zuständen (Tabelle 4.2).

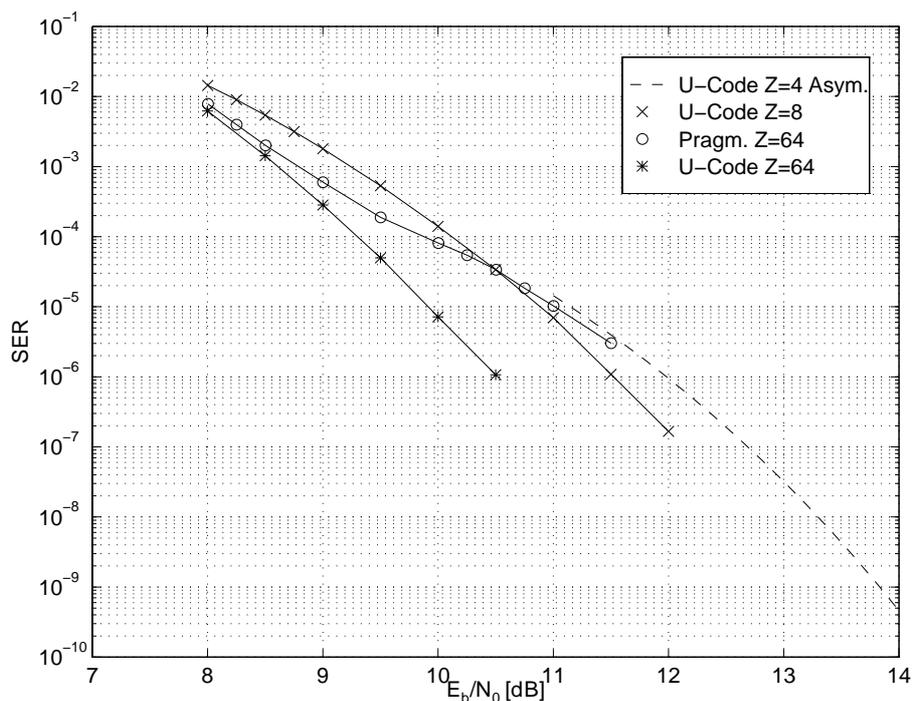


Abbildung 6.3: Leistungseffizienz des pragmatischen Trelliscodes

Ein Vergleich der Leistungseffizienz mit Ungerböck-Codes ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Alle dargestellten Modulationsverfahren besitzen die gleiche Modulationsrate $R_m = 4$.

Eine nähere Untersuchung der Konstruktionsmethode wird im nächsten Abschnitt beschrieben und führt uns auch zu den punktierten pragmatischen Trelliscodes (P^2 -Codes), die in [21, 22] vorgestellt werden.

6.2 Quasi-Standard Faltungscode und Binäre Gitter

Nach [9] ist ein reelles zweidimensionales Gitter \mathcal{L} ein *binäres Gitter*, wenn für gewisse $m \in \mathcal{N}$ $2^m \mathcal{Z}^2$ ein Teilgitter von \mathcal{L} ist. Das kleinste m bezeichnet man als die *2-Tiefe* des Gitters. Im besonderen bezeichnet man für $m = 1$ das Gitter $2\mathcal{Z}^2$ als *mod-2 Gitter* und für $m = 2$ das Gitter $4\mathcal{Z}^2$ als *mod-4 Gitter*.

\mathcal{L}^i mit $i = 0, \dots, 2^m - 1$ bezeichnet alle 2^m Nebenklassen des Gitters $2^m \mathcal{Z}^2$ bezüglich des ursprünglichen Gitters \mathcal{Z}^2 . Bei einer unendlich ausgedehnten Signalkonstellation sind die Punkte \vec{s}^i Elemente des \mathcal{Z}^2 -Gitters. Der quadratische Euklidische Abstand zwischen zwei Gittern \mathcal{L}^i und \mathcal{L}^j , also zwischen Elementen der 2^m Nebenklassen, ist der minimale Abstand zwischen zwei Punkten, die nicht im gleichen Gitter \mathcal{L}^i liegen:

$$h_E^2(\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j) = \min_{\vec{s}^i \in \mathcal{L}^i, \vec{s}^j \in \mathcal{L}^j} d_E^2(\vec{s}^i, \vec{s}^j) \quad (6.2)$$

Für die Pfadlänge eines Fehlerereignisses gilt nun mit Gleichung 4.2

$$\begin{aligned} L_\epsilon &= \sum_{\gamma=0}^{\epsilon-1} d_E^2(\vec{s}_\gamma, \widehat{\vec{s}}_\gamma) \\ &\geq \sum_{\gamma=0}^{\epsilon-1} h_E^2(\mathcal{L}_\gamma, \widehat{\mathcal{L}}_\gamma) \end{aligned}$$

Die Randeffekte der Signalkonstellation verursachen diese Ungleichung.

Betrachten wir nun das mod-2 Gitter aus dem Einführungsbeispiel. Wir stellen die quadratische Euklidische Distanzen zwischen den vier Nebenklassen und die Hammingdistanzen der Codebits (c^1, c^0) zum Vergleich gegenüber:

$\frac{1}{\Delta_0^2} h_E^2(\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}})$	A	B	C	D	$d_H((c^1, c^0), (\widehat{c^1}, \widehat{c^0}))$	A	B	C	D
A	0	1	1	2	A	0	1	1	2
B	1	0	2	1	B	1	0	2	1
C	1	2	0	1	C	1	2	0	1
D	2	1	1	0	D	2	1	1	0

Abbildung 6.4: Vergleich zwischen quadratischer Euklidischer und Hamming Distanz

Man erkennt, daß $h_E^2(\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}}) = \Delta_0^2 d_H((c^1, c^0), (\widehat{c^1}, \widehat{c^0}))$ in diesem speziellen Fall gilt. Für das mod-2 Gitter ist $L_1 = 4\Delta_0^2$; die Pfadlängen der längeren Fehlerereignisse $\epsilon > 1$ schätzt man nun durch eine untere Schranke ab:

$$L_\epsilon \geq \sum_{\gamma=0}^{\epsilon-1} \Delta_0^2 d_H((c^1, c^0), (\widehat{c^1}, \widehat{c^0})) \geq \Delta_0^2 d_{H,free}$$

Dabei ist $d_{H,free}$ die minimale Hammingdistanz des Faltungscodes der Rate $\frac{1}{2}$. Somit gilt für die minimale quadratische Euklidische Distanz:

$$d_{E,free}^2 = \Delta_0^2 \min\{4, d_{H,free}\}$$

Betrachten wir das mod-4 Gitter und den pragmatischen punktierten Trelliscode, wie er in [21] vorgeschlagen wurde.

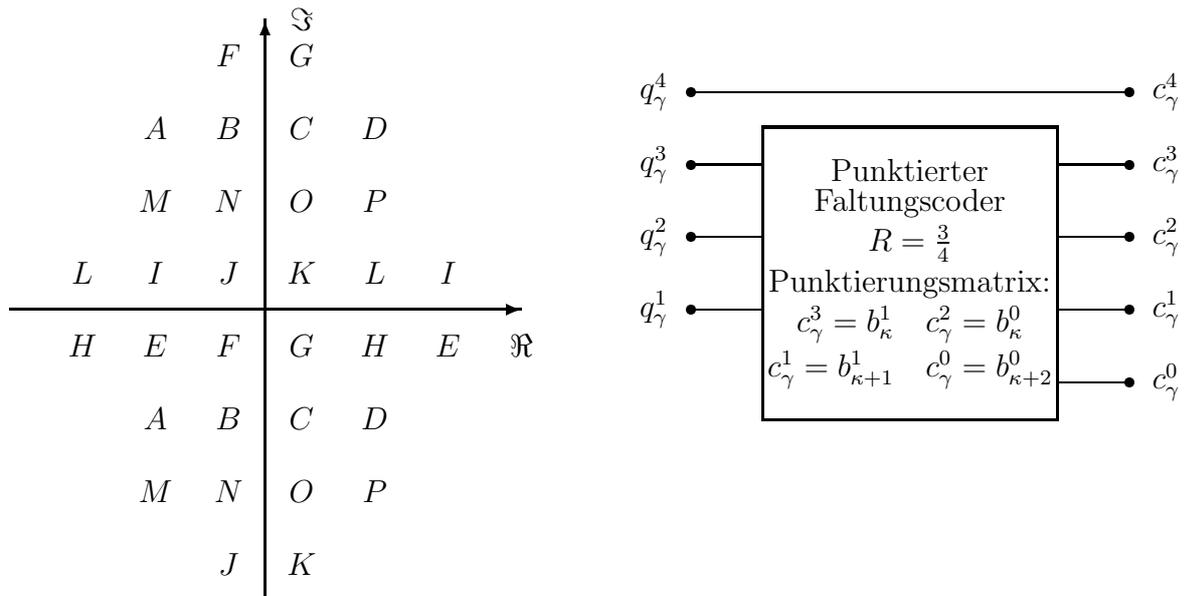


Abbildung 6.5: 32Cross Signalkonstellation und punktierter Coder des P^2 Trelliscodes

Im weiteren betrachten wir nun wieder das unendlich ausgedehnte Gitter $4\mathbb{Z}^2$. Wir stellen fest, daß wir die Zuordnung in [22] eine Separierung in zwei orthogonale eindimensionale Gitter möglich ist:

$$4\mathbb{Z}^2 = 4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$$

Die Zuordnung der Codebits geben wir in Tabelle 6.1 wieder. Dabei bestimmen die Bits (b_κ^1, b_κ^0) die Position des Signalpunktes in Richtung der imaginären Achse; die Position in Richtung der reellen Achse legen die Bits $(b_{\kappa+1}^1, b_{\kappa+2}^0)$ fest.

b_κ^1	b_κ^0				
1	0	M	N	O	P
1	1	I	J	K	L
0	1	E	F	G	H
0	0	A	B	C	D
		0	0	1	1
		0	1	1	0

Tabelle 6.1: Die Zuordnung der Nebenklassen zu den codierten Levels beim P^2 Code

Wir vergleichen nun wieder quadratische Euklidische und Hammingische Distanz. Wir betrachten nur die 4 Nebenklassen \mathcal{L}^i der $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ Partitionierung in Richtung der reellen

$\frac{1}{\Delta_0^2} h_E^2(\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}})$	A	B	C	D	$d_H((b_\kappa^1, b_\kappa^0), (\widehat{b_\kappa^1}, \widehat{b_\kappa^0}))$	00	01	11	10
A	0	1	4	1	00	0	1	2	1
B	1	0	1	4	01	1	0	1	2
C	4	1	0	1	11	2	1	0	1
D	1	4	1	0	10	1	2	1	0

Abbildung 6.6: Vergleich zwischen quadratischer Euklidischer und Hamming Distanz beim P^2 Code

Achse. Für die 4 Nebenklassen \mathcal{G}^i in Richtung der imaginären Achse kann analog vorgegangen werden.

Somit gilt für die Pfadlänge der Fehlerereignisse mit $\epsilon > 1$ wegen der Separierbarkeit:

$$L_\epsilon \geq \sum_{\kappa=0}^{\epsilon-1} h_E^2(\mathcal{L}_\kappa, \widehat{\mathcal{L}}_\kappa) + h_E^2(\mathcal{G}_\kappa, \widehat{\mathcal{G}}_\kappa) \quad (6.3)$$

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß der quadratische Euklidische Abstand zwischen den Nebenklassen größer oder gleich der Hammingdistanz zwischen den korrespondierenden Codebits ist:

$$h_E^2(\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}}) \geq \Delta_0^2 d_H((b_\kappa^1, b_\kappa^0), (\widehat{b_\kappa^1}, \widehat{b_\kappa^0}))$$

Daraus ergibt sich:

$$L_\epsilon \geq \sum_{\kappa=0}^{\epsilon-1} d_H((b_\kappa^1, b_\kappa^0), (\widehat{b_\kappa^1}, \widehat{b_\kappa^0})) + d_H((b_{\kappa+1}^1, b_{\kappa+2}^0), (\widehat{b_{\kappa+1}^1}, \widehat{b_{\kappa+2}^0}))$$

Bei $4\mathbb{Z}^2$ -Gittern beträgt die Pfadlänge für Fehlerereignisse der Länge 1 $L_1 = 16\Delta_0^2$. Für diesen P^2 Code ergibt sich die minimale quadratische Euklidische Distanz zu:

$$d_{E,free}^2 = \Delta_0^2 \min\{16, \widetilde{d_{H,free}}\}$$

wobei $\widetilde{d_{H,free}} = 5$ die minimale Hammingdistanz des punktierten Faltungscoders bezeichnet. [22] Dieser P^2 Code besitzt nun eine minimale quadratische Euklidische Distanz von $d_{E,free}^2 = 5\Delta_0^2$. Mit der Varianz der endlichen Signalkonstellation $\mathcal{E}\{|s^z|^2\} = 5.5$ erhält man für die quadratische normierte Distanz [13]

$$d_{min}^2 = \frac{d_{E,free}^2}{2\mathcal{E}\{|s^z|^2\}} R_m = 1.81$$

Simulationsergebnisse mit dem äquivalenten invarianten Coder (d.h. Entscheidungen nach jedem dritten Trellisschritt im zeitvarianten Trellis, also in Zeitabständen T_c) zeigt Abbildung 6.7. Verglichen wird mit dem Ungerböck-Code mit 8, 16 und 64 Zuständen bei einer Modulationsrate von $R_m = 4$. Es ist zu bemerken, daß die Leistungseffizienz dieses pragmatischen punktierten Codes für hohe Störabstände nahe an die des Ungerböck'schen Codes mit 16 Zuständen reicht. Aufgrund unserer vorherigen Betrachtungen ist dieser Effekt durch die endliche Signalkonstellation zu begründen. Es ist durchaus möglich, daß fehlende Nachbarn in der Signalkonstellation diese Effizienzsteigerung verursachen.

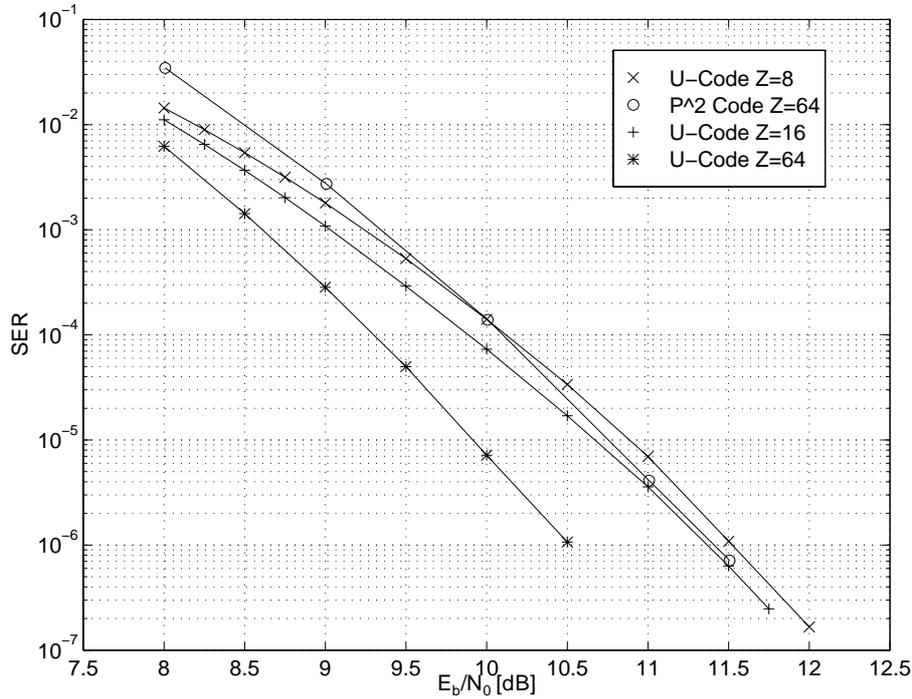


Abbildung 6.7: Leistungseffizienz des pragmatischen punktierten Trelliscodes

6.3 Decodierung des P^2 -Codes

Beim Decodiervorgang werden im ersten Trellisschritt die Distanzen der Nebenklassen \mathcal{G}^i in Richtung der imaginären Achse bestimmt.

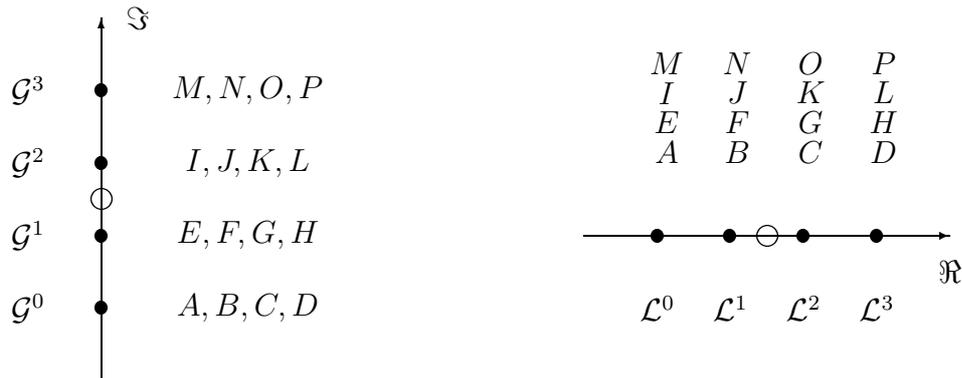


Abbildung 6.8: Veranschaulichung der Distanzberechnung für P^2 Decoder

$$\lambda_{S_\kappa S_{\kappa+1}}(\Im\{\vec{e}_\gamma\}, \mathcal{G}^i) = \min_{\forall \vec{s} \in \mathcal{G}^i} d_E^2(\Im\{\vec{e}_\gamma\}, \vec{s}) \tag{6.4}$$

Beim Decodiervorgang im zweiten und dritten Trellisschritt werden die Distanzen der Gitter \mathcal{L}^i zum Empfangspunkt bezüglich der reellen Achse bestimmt.

$$\lambda_{S_{\kappa+1} S_{\kappa+3}}(\Re\{\vec{e}_\gamma\}, \mathcal{L}^i) = \min_{\forall \vec{s} \in \mathcal{L}^i} d_E^2(\Re\{\vec{e}_\gamma\}, \vec{s}) \tag{6.5}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $S_{\kappa+1}$ nach $S_{\kappa+3}$ wird nun in ein Produkt zerlegt, obwohl statistische Abhängigkeiten vorliegen.

$$P(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\} | S_{\kappa+3}, S_{\kappa+2}, S_{\kappa+1}, \mathcal{L}_\gamma^i) \approx P(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\} | S_{\kappa+2}, S_{\kappa+1}, \mathcal{L}_\gamma^i) P(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\} | S_{\kappa+3}, S_{\kappa+2}, \mathcal{L}_\gamma^i)$$

Eine Entscheidung durch welchen Zustand $S_{\kappa+2}$ der Pfad läuft, wird unabhängig vom Zustand $S_{\kappa+3}$ getroffen und ist somit nicht optimal. Der Viterbi-Algorithmus ist nicht in der Lage, eine optimale Vorabentscheidung zu treffen. Für die pseudo-Zweiglängen ergeben sich:

$$\begin{aligned} \lambda_{S_{\kappa+1}S_{\kappa+2}}(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, b_{\kappa+1}^1 = 0) &= \min_{\forall \vec{s} \in \{\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^1\}} d_E^2(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, \vec{s}) \\ \lambda_{S_{\kappa+1}S_{\kappa+2}}(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, b_{\kappa+1}^1 = 1) &= \min_{\forall \vec{s} \in \{\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3\}} d_E^2(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, \vec{s}) \\ \lambda_{S_{\kappa+2}S_{\kappa+3}}(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, b_{\kappa+2}^1 = 0) &= \min_{\forall \vec{s} \in \{\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^3\}} d_E^2(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, \vec{s}) \\ \lambda_{S_{\kappa+2}S_{\kappa+3}}(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, b_{\kappa+2}^1 = 1) &= \min_{\forall \vec{s} \in \{\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2\}} d_E^2(\mathfrak{R}\{\vec{e}_\gamma\}, \vec{s}) \end{aligned}$$

6.4 Vergleich Anhand der Leistungseffizienz

Zum Vergleich wurde bei den Simulationen Ungerböck-Codes mit 8 und 16 Zuständen angegeben.

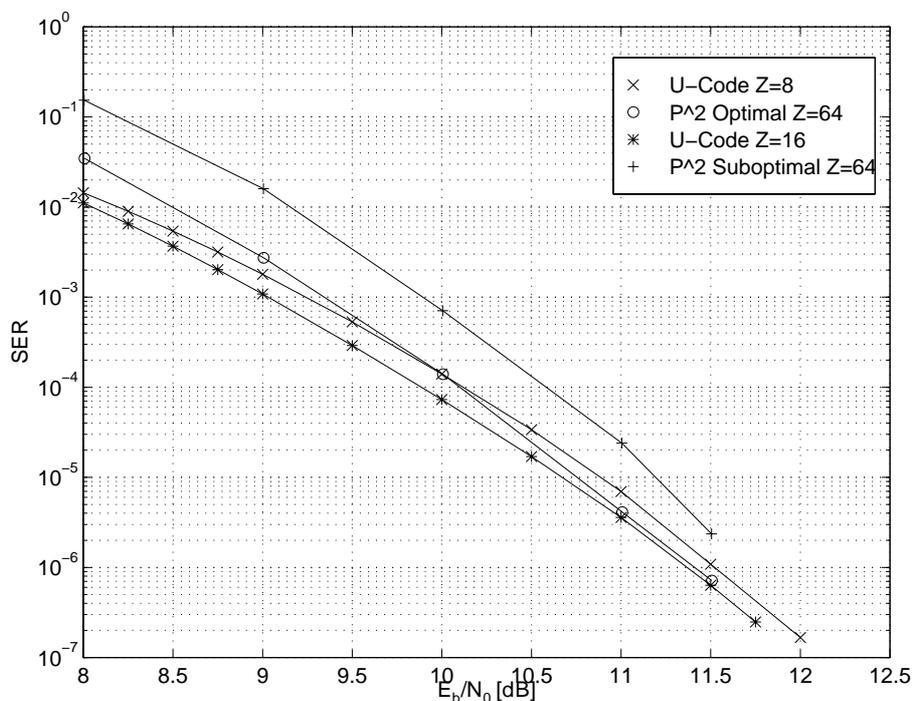


Abbildung 6.9: Leistungseffizienz des suboptimal decodierten pragmatischen punktierten Trelliscodes

Deutlich erkennt man in Abbildung 6.9 die Degradierung durch die suboptimale Decodierung im Vergleich zum optimal decodierten P^2 -Code.

6.5 Vergleich Anhand der Komplexität

Wir betrachten hier nur den Spezialfall des \mathcal{Z}^2 -Gitters in Verbindung mit dem punktierten Faltungscoder der Rate $\frac{3}{4}$. Jeder Modulationsschritt besteht aus 3 Trellisschritten. $2 \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ Distanzen sind aus der Signalkonstellation zu berechnen, da diese in zwei orthogonale $4\mathcal{Z}$ -Gitter separierbar ist. ($\lfloor \cdot \rfloor$ kennzeichnet die nächstgrößere ganze Zahl) Jede Distanz benötigt eine Addition bzw. eine Multiplikation. $2 \cdot (2^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} - 1)$ Vergleiche sind für jeden der $2 \cdot 2^2$ Teilmengen notwendig. Schließlich sind für jeden Trellisschritt und Zustand 2 Additionen der Zweiglängen und ein Vergleich der akkumulierten Länge durchzuführen. Nach Normierung auf die Modulationsrate ergibt sich

$$A = \frac{560 + (6 + 2m) \cdot 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{n} \quad (6.6)$$

Für eine Modulationsrate von $n = 4$ ergibt sich eine Aufwandszahl $A_{PP} = 156$ bei einem asymptotischen Codierungsgewinn von $G_{Asymp} \approx 3.6dB$. Das Referenzmodulationssystem ist das uncodierte 16QAM Verfahren. Der Vergleich zu den Ungerböck-Codes bzw. zu den optimal punktierten Codes findet man in Abbildung 5.13.

6.6 Flexible Anpassung

Da die Betrachtungen an dem unendlich ausgedehnten \mathcal{Z}^2 -Gitter vorgenommen wurden und die Bedingungen für die codierten Levels erläutert wurden, ist es möglich, die Signalkonstellation um Punkte zu erweitern, die Punkte der Gitter $\mathcal{L}^i \times \mathcal{G}^i$ sind. Es erhöht sich dabei nur die Anzahl der uncodierten Levels, die keinen Einfluß auf den Coder haben. Höherratige Faltungscodes scheinen keinen Vorteil zu bedeuten, da durch weitere Punktierung die Hamming Distanz abnimmt und die Distanz paralleler Übergänge bei der $\mathcal{Z}^2/4\mathcal{Z}^2$ Partitionierung mit $16\Delta_0^2$ bereits sehr hoch ist.

Kapitel 7

Leistungseffizienterer P^2 Code

7.1 Einführung

Die Darstellung der optimal punktierten Trelliscoder in systematischer Struktur zeigt die Bedeutung des Redundanzbits für die Aufteilung der Trellisstruktur, d.h. der Teilung der Zustandsmenge $\mathcal{S}_{\kappa+1}^l$ in zwei Teilmengen. Durch Bildung der systematischen Struktur aus der nichtrekursiven konstruieren wir genau einen Indikator y^0 , der eindeutig die Gruppe festlegt. Denn dieser Indikator ist der Wert einer Zelle eines binären Registers der Länge p und teilt somit die Zustandsmenge a priori in zwei Teilmengen. Diese Vorgehensweise erläutern wir anhand des Quasi-Standard Faltungscoders. Als Ergebnis erhalten wir einen pragmatischen Code, der leistungsfähiger ist als die bereits vorgestellten pragmatischen Codes.

7.2 Konstruktion

Die Signalkonstellation, die Zuordnungsvorschrift und die Basen $\underline{U}^0, \underline{U}^1$ behalten wir wie in Kapitel 5 beschrieben bei. Die Generatorpolynomdarstellung nach Gleichung 6.1 kürzen wir durch die Generatorpolynome g_0, g_1 ab:

$$(b^1, b^0) = a^1 \odot (g^1, g^0)$$

Da nun das Indikatorbit nicht vom aktuellen Zustand des Informationsbits abhängen, sondern sich direkt aus einem binären Zustand eines Registerelements ergeben soll, bilden wir die modulo-2 Summe der Codebits und die systematische Struktur:

$$\begin{aligned}(y^1, y^0) &= x^1 \left(1, \frac{g^1 \oplus g^0}{g^1} \right) \\ &= x^1 \left(1, \frac{D^5 \oplus D}{D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus 1} \right)\end{aligned}$$

Die systematische Struktur zeigt Abbildung 7.1. Wir erhalten sie formal in dem wir vor die rückkopplungsfreie Struktur einen Scrambler schalten:

$$\mathbf{B}(D) = \frac{1}{D^6 \oplus D^5 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus 1}$$

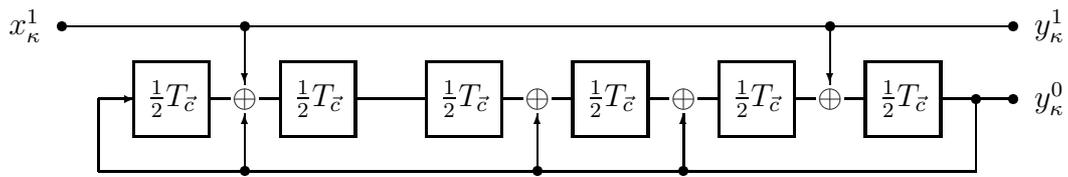


Abbildung 7.1: Systematische Struktur des Quasi-Standard Faltungscoders

und zum Ausgangsbit b^0 das Bit b^1 mod-2 addieren.

Wir punktieren nun zu einem Rate $\frac{2}{3}$ Faltungscoder. Mit der Begründung der Gruppenteilung sind die Bits y_κ^1 und $y_{\kappa+1}^1$ nicht zu punktieren. Wir streichen hingegen das Bit y_κ^0 . Somit ergeben sich für die Codebits des Rate $\frac{2}{3}$ Coders mit $2\gamma = \kappa$:

$$\begin{aligned} y_\kappa^1 &= c_\gamma^2 \\ y_{\kappa+1}^1 &= c_\gamma^1 \\ y_{\kappa+1}^0 &= c_\gamma^0 \end{aligned}$$

7.3 Simulationsergebnisse

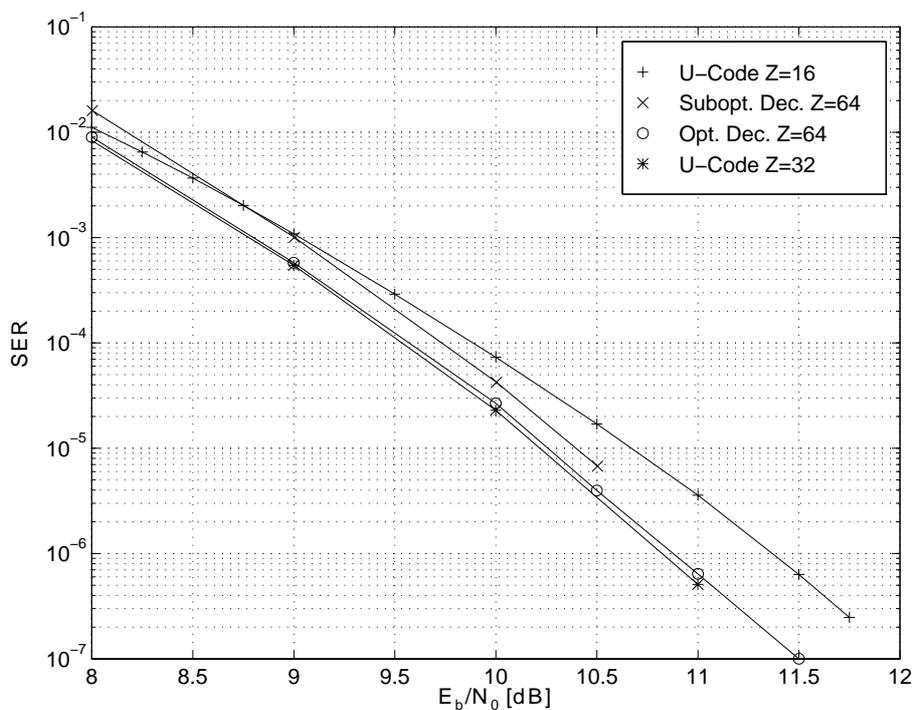


Abbildung 7.2: Leistungseffizienz des optimal punktierten Quasi-Standard Faltungscodes

Decodieren wir diesen punktierten Code mit dem Viterbi-Algorithmus, der auf dem äquivalenten $R = \frac{2}{3}$ Coder basiert, so treffen wir zu jedem Zeitintervall $T_{\tilde{c}}$ eine Entscheidung. Somit erhalten wir die Leistungseffizienz des verbesserten P^2 -Codes bei optimaler Decodierung. Die Leistungsfähigkeit des Codes ist unabhängig von der Decodierung. Das komplette Übertragungssystem ist aber auch von der Effizienz der Decodierung abhängig. Entscheiden wir alle $\frac{1}{2}T_{\tilde{c}}$, so sind die Projektionen zu berechnen, die bei einer endlichen Signalkonstellation Leistungseinbußen implizieren (Abbildung 7.2). Trotz der geringen Einbuße dieser Decodiermethode ist bei einer Symbolfehlerrate von $SE R = 10^{-5}$ der verbesserte P^2 -Code um ca. 0.25 dB besser als der Ungerböck'sche Code mit 16 Zuständen.

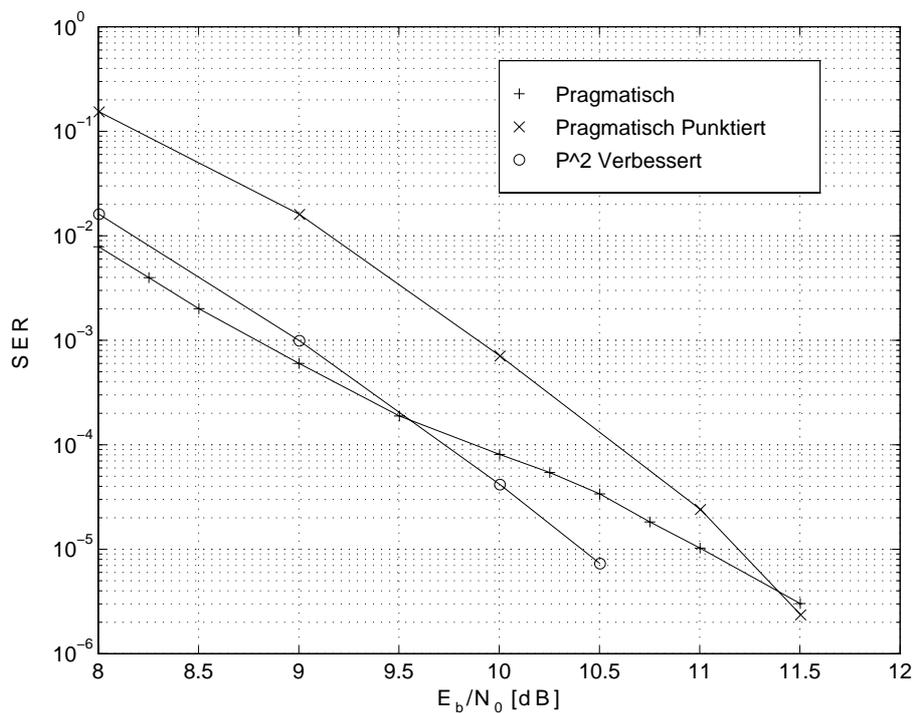


Abbildung 7.3: Vergleich der Trelliscodes konstruiert aus dem Quasi-Standard Faltungscod

Abschließend stellen wir alle pragmatische bzw. pragmatische punktierte Trelliscodes gegenüber (Abbildung 7.3). Wir können erkennen, daß der verbesserte P^2 -Code gegenüber den zuvor untersuchten pragmatischen Codes bei einer Symbolfehlerrate von $SE R = 10^{-5}$ einen Gewinn von 0.5 - 0.75 dB aufweist.

Kapitel 8

Ausblick

Im Hinblick auf noch leistungseffizientere P^2 -Codes als in Kapitel 7 vorgestellt, sind Simulationsergebnisse für die Veränderung der Zuordnung der Codebits c^1 und c^2 von Interesse. Im speziellen ist dabei der Einfluß der endlichen Signalkonstellation von Bedeutung.

Bei der Klasse der punktierten Trelliscodes ist der Einfluß der endlichen Signalkonstellation im Allgemeinen zu untersuchen:

- Welchen Einfluß haben die linearen Transformationen auf die Randeffekte ?
- Sind andere als unitäre Basen auch möglich und welchen Einfluß besitzen sie auf die Zweiglängen?
- Ist die Begrenzung der Signalkonstellation in der Zweiglängenberechnung zu berücksichtigen ?

Punktierte Trelliscodes stellen eine flexible Klasse trelliscodierter Modulationsverfahren dar. Für die technische Realisierung sind aber auch Encoder und Decoder der Rate $\frac{1}{2}$ mit frei programmierbaren Koeffizienten von noch größerer Bedeutung. Je nach Anwendungsfall kann der Code punktiert und mit den optimalen Koeffizienten programmiert werden.

Anhang A

CCPAM: Metrische und Algebraische Eigenschaften

A.1 Eigenschaften einer Menge \mathcal{X}

A.1.1 Algebraische Eigenschaften des Körpers $(\mathcal{X}, \oplus, \odot)$

- Abelsche Additive Gruppe (\mathcal{X}, \oplus) :

$$\mathcal{O}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{X}$$

1. $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \in \mathcal{X}$ (Abgeschlossenheit)
2. $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C})$ (Assoziativität)
3. $\mathcal{A} \oplus \mathcal{O} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{A}$ (Existenz des neutralen Elements)
4. $\mathcal{A} \oplus \mathcal{D} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{O}$ (Existenz des inversen Elements)
5. $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ (Kommutativität)

- Abelsche Multiplikative Gruppe $(\mathcal{X} \setminus \{\mathcal{O}\}, \odot)$ mit neutralem Element $\mathcal{I} \in \mathcal{X}$.

- Distributivität:

$$\mathcal{A} \odot (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}) = \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \oplus \mathcal{A} \odot \mathcal{C}$$

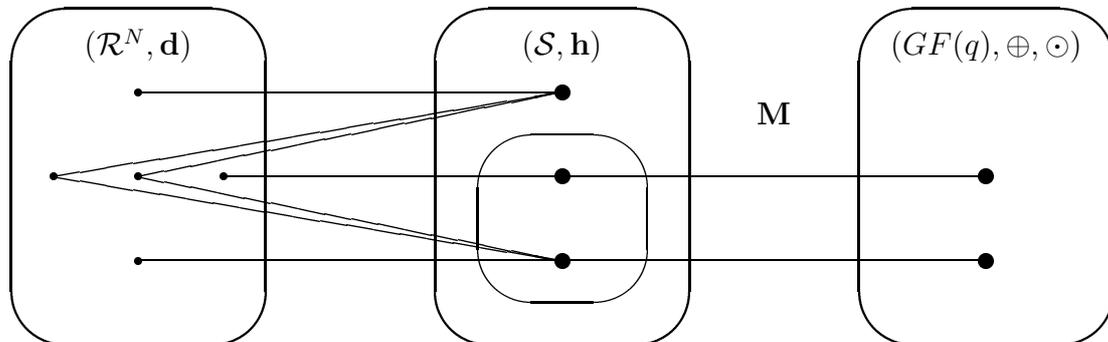
A.1.2 Metrische Eigenschaften

Eine Menge \mathcal{X} mit den Elementen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ heißt *metrischer Raum* $(\mathcal{X}, \mathbf{d})$, wenn jedem Elementepaar $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{X}$ eine reelle Zahl $\mathbf{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (*Metrik*) mit folgenden Eigenschaften zugeordnet ist:

1. $\mathbf{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0$ $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{X}; \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$
2. $\mathbf{d}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 0$ $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{X}$
3. $\mathbf{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{d}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{X}$
4. $\mathbf{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \mathbf{d}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{d}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{X}$

A.2 Verknüpfung der Eigenschaften

A.2.1 Veranschaulichung



Metrischer Raum $(\mathcal{R}^N, \mathbf{d})$:
Menge aller Euklidischen
Punkte; den Punktepaar-
en wird die Euklidische
Metrik zugeordnet.

Metrischer Raum $(\mathcal{S}, \mathbf{h})$:
Menge aller möglichen Sig-
nal- und Teilsignalmengen
der trelliscodierten PAM
mit der Metrik \mathbf{h}

Dem Körper $(GF(q), \oplus, \odot)$
wird die geometrische Ei-
genschaft eines metrischen
Raumes hinzugefügt.

Abbildung A.1: *Verknüpfung metrischer und algebraischer Eigenschaften*

Der Isomorphismus zwischen den Elementen der Teilmenge des metrischen Raumes $(\mathcal{S}, \mathbf{h})$ und der des Körpers $(GF(q), \oplus, \odot)$ wird durch das Mapping \mathbf{M} beschrieben.

A.2.2 Algebraische Forderungen

Der Isomorphismus \mathbf{M} besitzt folgende Eigenschaften:

- 1-1 Korrespondenz zwischen beiden Mengen
- Relationen und Operationen werden durch die Korrespondenz erhalten

Der vom linearen Faltungscoder erzeugte Code \mathcal{C} ist ein linearer Unterraum des Vektorraumes \mathcal{V} über dem Körper $(GF(q), \oplus, \odot)$ der folgendermaßen definiert ist:

- \mathcal{V} sei eine additive abelsche Gruppe, derart, daß eine skalare Multiplikation von \mathcal{V} mit $GF(q)$ existiert.
- Distributivität hinsichtlich der Vektor- als auch der Körperaddition.
- Assoziativität bezüglich der skalaren Multiplikation.
- Existenz des neutralen Elements der skalaren Multiplikation.

Folgerung: Die Vektoraddition in \mathcal{V} über dem Körper $(GF(q), \oplus, \odot)$ stellt sicher, daß die \oplus -Verknüpfung zweier Codewörter eines linearen Codes wieder ein Codewort ergibt.

A.2.3 Geometrische Forderungen

Im folgenden betrachten wir eine Distanz zwischen zwei Punktengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ und zeigen, daß diese die Eigenschaft einer Metrik besitzt. [2]

Im ersten Schritt definieren wir die Distanz zwischen einem Punkt $a \in \mathcal{A}$ und der Menge \mathcal{B}

$$\hat{\mathbf{d}}(a, \mathcal{B}) = \min_{b \in \mathcal{B}} \mathbf{d}(a, b) \quad (\text{A.1})$$

Im zweiten Schritt interessieren wir uns für die Distanz von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ; sie ist noch abhängig von der Reihenfolge:

$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max_{a \in \mathcal{A}} \hat{\mathbf{d}}(a, \mathcal{B}) \quad (\text{A.2})$$

Schließlich wird die Symmetrie bezüglich der beiden Argumente hergestellt:

$$\mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} \quad (\text{A.3})$$

Überprüfung der Metrik Axiome:

1. $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$

$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max_{a \in \mathcal{A}} \{\min_{b \in \mathcal{B}} \mathbf{d}(a, b)\}$$

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{d}(a, b) > 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$
 $\Rightarrow \mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0;$
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
 $\tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0; \quad \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) > 0; \Rightarrow \mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) > 0;$

2. $\mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \max_{a \in \mathcal{A}} \hat{\mathbf{d}}(a, \mathcal{A}) = 0;$

3. $\mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{B}, \mathcal{A})\} = \mathbf{h}(\mathcal{B}, \mathcal{A});$

4. $\mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{h}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$

für $a \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}(a, \mathcal{B}) &= \min_{b \in \mathcal{B}} \mathbf{d}(a, b) \\ &\leq \min_{b \in \mathcal{B}} \{\mathbf{d}(a, c) + \mathbf{d}(c, b)\} \quad \forall c \in \mathcal{C} \\ &= \mathbf{d}(a, c) + \min_{b \in \mathcal{B}} \mathbf{d}(c, b) \quad \forall c \in \mathcal{C} \\ \hat{\mathbf{d}}(a, \mathcal{B}) &\leq \min_{c \in \mathcal{C}} \mathbf{d}(a, c) + \max_{c \in \mathcal{C}} \{\min_{b \in \mathcal{B}} \mathbf{d}(c, b)\} \end{aligned}$$

denn $\mathbf{e} + \mathbf{f} \leq \min \mathbf{e} + \max \mathbf{f} \leq \max \mathbf{e} + \max \mathbf{f}$ und $\exists b \in \mathcal{B}, c \in \mathcal{C} : \mathbf{d}(a, b) = \mathbf{d}(a, c) + \mathbf{d}(c, b)$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{d}}(a, \mathcal{B}) &\leq \hat{\mathbf{d}}(a, \mathcal{C}) + \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \\
 \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\leq \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \\
 \mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\leq \max\{\tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \tilde{\mathbf{d}}(\mathcal{C}, \mathcal{A})\} \\
 &\leq \mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{h}(\mathcal{C}, \mathcal{B})
 \end{aligned}$$

Anmerkung zur vereinfachten Berechnung:

Falls $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ gilt und \mathcal{A}, \mathcal{B} (endliche) Teilsignalmengen mit Gitterstruktur sind, ist

$$\mathbf{h}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} \mathbf{d}(a, b), \quad (\text{A.4})$$

da die 'max'-Operation überflüssig wird.

A.2.4 Reguläres Labeling

Eine Methode der Zuordnung der Körperelemente zu den Elementen des metrischen Raumes wird durch den Begriff des regulären Labelings festgelegt, d.h. die Kennzeichnung der Elemente des metrischen Raumes erfolgt derart, daß für die Codesymbole $c, f \in (GF(q), \oplus, \odot)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \forall f \in GF(q) \\
 \mathbf{h}(\mathbf{M}(c), \mathbf{M}(c \oplus f)) &= \mathbf{h}(\mathbf{M}(0), \mathbf{M}(f)) \quad \forall c \in GF(q) \\
 &= \mathbf{h}(\mathcal{O}, \mathbf{M}(f))
 \end{aligned}$$

Es liegt ein reguläres Labeling vor, wenn z.B. eine Ungerböck Partitionierung vorgenommen wurde und die Ungerböcksche Distanz-Schranke mit Gleichheit erfüllt wird. (z.B. $\mathcal{Z}^2/\mathbf{R}\mathcal{Z}^2/2\mathcal{Z}^2/2\mathbf{R}\mathcal{Z}^2$). [9]

A.3 Beispiel: Trelliscodierte PAM mit Ungerböck Partitionierung $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$

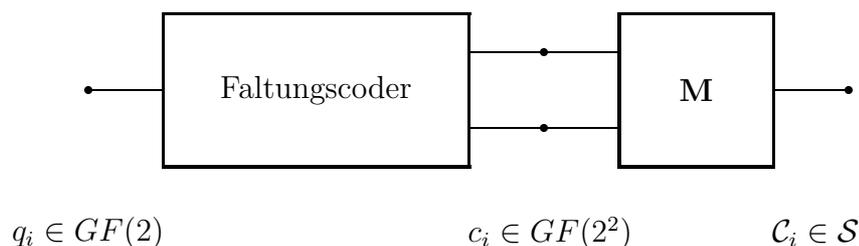


Abbildung A.2: Systemmodell des Coders

Zur Verdeutlichung der metrischen und algebraischen Eigensschaften erläutern wir in einem Beispiel die trelliscodierte PAM mit Ungerböck Partitionierung $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$. Abbildung A.2 zeigt das korrespondierende Systemmodell des Coders.

Algebraische Struktur

Der Isomorphismus, beschrieben durch das Mapping \mathbf{M} , erhält die algebraischen Eigenschaften. Dies verdeutlicht das Beispiel der additiven Gruppen in Abbildung A.3.

\oplus	00	01	10	11	\mathbf{M}	\square	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
00	00	01	10	11	00 \equiv Λ_1	Λ_1	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
01	01	00	11	10	01 \equiv Λ_2	Λ_2	Λ_2	Λ_1	Λ_4	Λ_3
10	10	11	00	01	10 \equiv Λ_3	Λ_3	Λ_3	Λ_4	Λ_1	Λ_2
11	11	10	01	00	11 \equiv Λ_4	Λ_4	Λ_4	Λ_3	Λ_2	Λ_1

Abbildung A.3: *Isomorphismus zwischen zwei additiven Gruppen*

Geometrische Struktur

Die partitionierten Lattices lassen sich wie in Abbildung A.4 im 1-dimensionalen Euklidischen Raum darstellen.

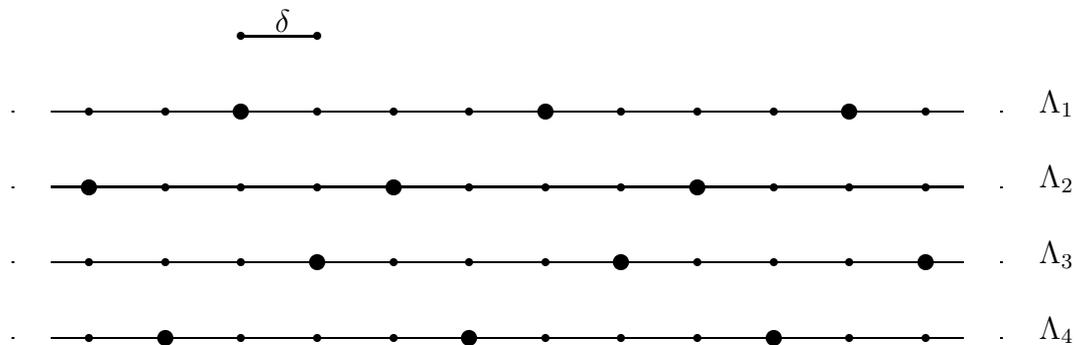


Abbildung A.4: *Die Subsets der Partitionierung $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$*

Durch die Betrachtung der Lattices im metrischen Raum, läßt sich die Metrikstruktur nach Abbildung A.5 angeben.

\mathbf{h}	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Λ_1	0	$4\delta^2$	δ^2	δ^2
Λ_2	$4\delta^2$	0	δ^2	δ^2
Λ_3	δ^2	δ^2	0	$4\delta^2$
Λ_4	δ^2	δ^2	$4\delta^2$	0

Abbildung A.5: *Metrikstruktur der Lattices*

Es liegt ein reguläres Labeling vor, d.h die Sequenz $\langle \Lambda_1 \rangle$ kann als Referenzpfad herangezogen werden.

$$\mathbf{h}(\mathbf{M}(c), \mathbf{M}(c \oplus f)) = \mathbf{h}(\Lambda_1, \mathbf{M}(f)) \quad \forall f, c \in GF(2^2).$$

Anhang B

Simulationsprogramme

B.1 TCM.C

Diese Programm simuliert ein trelliscodiertes Modulationsverfahren mit zweidimensionalen reellen Signalkonstellationen und einfacher Zuordnung. Das Programm besteht aus mehreren Objekten:

- Objekt zur Bestimmung der Meßdaten (Signalrauschverhältnis, Bitfehler, Symbolfehler)
- Interface, das die berechneten Daten als Matlab-File speichert.
- Der Trellisencoder realisiert den Faltungscoder und das Mapping. Es wird die Speicherung der Quellensymbolsequenzen für einen späteren Vergleich mit den Schätzwerten ermöglicht.
- Viterbi-Algorithmus: Dieses Objekt enthält Funktionen zum Auf- und Abbau der notwendigen Register. Die Funktion *VAacs* führt die Elementaren Operationen des Viterbi-Algorithmus durch.
- Trellisdecoder: Diese Objekt bestimmt die Distanzen, die dem Viterbi-Algorithmus als Zweiglängen zur Verfügung gestellt werden. Gleichzeitig wird die vollständige geschätzte Quellensymbolblocksequenz bestimmt.
- Main: Das Störsignal wird für die verschiedenen Kanäle eingekoppelt und eine quasi statistisch-unabhängige Information wird über das Modell transportiert.

Simulationen die den äquivalenten zeitinvarianten Coder verwenden, wurden mit **TCM.C** durchgeführt.

B.2 PTCM.C

Dieses Programm simuliert punktierte Trelliscodes wie in Kapitel 5 beschrieben. Es ist ähnlich aufgebaut wie **TCM.C**, aber die Objekte Trellisencoder und Trellisdecoder verwenden nun punktierte Faltungscoder. Der Decoder enthält dabei folgende Objekte:

- *GetBestCosetPoint*: Dieses Objekt bestimmt den optimalen Signalpunkt innerhalb einer Teilmenge.
- *GetBranchMetrics*: Hier werden die entsprechenden Projektionen berechnet und die Zweiglängen des punktierten Trellis bestimmt.

B.3 PPTCM.C

Dieses Programm simuliert punktierte pragmatische Trelliscodes wie in Kapitel 6 beschrieben. Die Struktur entspricht der von TCM.C. Das Objekt Trellisdecoder enthält eine Funktion *VADetMetric* zur Bestimmung der suboptimalen Zweiglängen für den Viterbi-Algorithmus.

Literaturverzeichnis

- [1] Ayres, Frank, Jr., *Theory and Problems of Modern Abstract Algebra*, McGraw-Hill, New York, 1965
- [2] Barnsley, M. F., *Fractals Everywhere*, Academic Press Professional, Cambridge, 1993
- [3] Blahut, Richard E., *Digital Transmission of Information*, Addison-Wesley, 1990
- [4] Blahut, Richard E., *Theory and Practice of Error Control Codes*, Reading, Massachusetts, 1984
- [5] Bronstein, Semendjajew, *Ergänzende Kapitel zum Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1991
- [6] Cain, J.B, Clark, JR., G.C, Geist, J.M, *Punctured Convolutional Codes of Rate $(n - 1)/n$ and Simplified Maximum Likelihood Decoding*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 25, No. 1, 97-100, 1979
- [7] Chan, F., Haccoun, D., *High-Rate Punctured Convolutional Codes for Trellis-Coded Modulation*, Proc. IEEE International Symposium on Information Theory, p.414, San Antonio, Texas, 1993
- [8] Fischer, Robert, *Software: Algorithmen zur Simulation Trellis-Codierter Modulationsverfahren*, 1995
- [9] Forney, JR., G.D., *Coset Codes-Part I*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 34, No.5, 1123-1151, 1988
- [10] Forney, JR., G.D., *The Viterbi Algorithm*, Proceedings of the IEEE, Vol. 61, No. 3, 268-278, 1973
- [11] Gallager, Robert G., *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley & Sons, New York, 1968
- [12] How, Stephen K., *Practical Trellis Coded Modulation with Punctured Rate-2/3 Convolutional Codes*, General Instrument, San Diego, CA
- [13] Huber, J., *Trelliscodierung*, Springer Verlag, Berlin, 1992
- [14] Kammeyer, K. D., *Nachrichtenübertragung*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1992
- [15] Kim, J., Pottie, G.J., *On Punctured Trellis Coded Modulation*, IEEE, 678-682, 1995

- [16] Papoulis, Athanasios, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1991
- [17] Proakis, John G., *Digital Communications*, McGraw-Hill, New, York, 1995
- [18] Ungerboeck, G., *Channel Coding with Multilevel/Phase Signals*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 28, No. 1, 55-67, 1982
- [19] Ungerboeck, G., *Trellis-Coded Modulation with Redundant Signal Set Part I & II*, IEEE Communications Magazine, Vol. 25, No. 2, 5-21, 1987
- [20] Viterbi, Wolf, Zehavi, Padovani, *A Pragmatic Approach to Trellis-Coded Modulation*, IEEE Communications Magazine, No. 7, 11-19, 1989
- [21] Wolf, J.K., Zehavi, E., Editors: De Gaudenzi, Luise, *P² Codes: Pragmatic Trellis Codes Utilizing Punctured Convolutional Codes*, Audio and Video Digital Radio Broadcasting Systems and Techniques, Elsevier Science BV, 1994
- [22] Wolf, J.K., Zehavi, E., *P² Codes: Pragmatic Trellis Codes Utilizing Punctured Convolutional Codes*, IEEE Communications Magazine, No.2, 94-99, 1995
- [23] Yasuda, Y., Kashiki, K., Hirata, Y., *High-Rate Punctured Convolutional Codes for Soft Decision Viterbi Decoding*, IEEE Transactions on Communications, Vol. 32, No. 3, 315-319, 1984
- [24] Zurmühl, R., Falk, S., *Matrizen und ihre Anwendungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1984