Vad är en Partiell Differentialekvation?

Enkelt beskrivet så är en partiall differentialekvation en ekvation som innehåller partiella derivator. Mer specifikt så söker man en funktion som beror av flera variabler och som uppfyller en relation mellan dess partiella derivator. Det mest klassiska exemplet är Laplace ekvation

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

där man alltså söker funktionen $u(x,y,z)$ så att (1) är uppfylld.

Det finns en oändlig mängd olika partiella differentialekvationer, tex

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

eller

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Förmodligen så har ni stött på ovanstående ekvationer i andra kurser. Ekvation (1) beskriver många fysikaliska situationer såsom elektriska fält eller graviationspotentialer. Ekvation (2) kallas värmeledningsekvationen och är en modell för värmeledning. Och (3) kallas vågekvationen och beskriver vågrörelser.

Det finns en uppsjö av andra partiella differentialekvationer som har många olika, teoretiska och tillämpade, användningsområden. Ovanstående ekvationer beror bara på de två första derivatorna men det är enkelt att hitta på ekvationer som beror på högre derivator såsom

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} = 0, \tag{4}$$

vilken vi känner igen från hållfasthetsläran som en modell för beskrivningen av en plåt.

Ovanstående ekvationer är linjära, dvs om u och v är två lösningar så kommer $au + bv$ att vara en lösning för alla tal $a, b \in \mathbb{R}$. Men det är enkelt att hitta på andra ekvationer som inte är linjära tex.

$$|\nabla u(x,y,z)|^2 = 1, \tag{5}$$

vilket är en första ordningens (beror bara på första derivatan) ickelinjär ekvation. Den här ekvationen är viktig inom optiken. Det finns väldigt många andra tillämpningar av teorin för partiella differentialekvationer såsom ekonomiska tillämpningar, väderfenomen, kvantmekanik etc. etc.

Förhoppningsvis så ger det ovanstående en liten känsla för vad en partiell differentialekvation är. Och också en känsla för att de är väldigt varierade och viktiga - då de modellerar många viktiga fysikaliska fenomen. Men vad gör man när man jobbar med partiella differentialekvationer?

En av de viktigaste frågorna, som med alla ekvationer, är om det existerar lösningar och om man kan beräkna dem på något sätt. Såsom ekvationerna är formulerade ovan så är det lätt att hitta lösningar, tex om u är en konstant så är det en lösning till alla ovanstående ekvationer utom (5). Men i fysikaliska tillämpningar så vill man oftast lösa ekvationen i ett visst område i rummet såsom t.ex. en boll $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$. Vidare så brukar man behöva specificera värdet på randen av området, och också vid tidpunkten $t = 0$ om man löser ett tidsberoende problem såsom (2). Problemet formuleras då som

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = 0 & \text{då } x^2+y^2+z^2 < r^2 \text{ och } t > 0 \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z) & \text{då } x^2+y^2+z^2 < r^2 \text{ och } t = 0 \\ u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t) & \text{då } x^2+y^2+z^2 = r^2 \text{ och } t > 0, \end{array} \tag{6}$$

för några givna funktioner $f(x,y,z)$ och $g(x,y,z,t)$. Dessa ekvationer modellerar värmeflödet i bollen $B_r(0)$ om randen till bollen hålls vid temperaturen $g(x,y,z,t)$ och bollen har temperaturen $f(x,y,z)$ då $t = 0$. Ekvationerna (6) är inte triviala att lösa - om inte funktionerna f och g skulle vara väldigt enkla. Förmodligen så har ni lärt er beräkna lösningar till (6) i någon kurs med hjälp av variabelseparation eller liknande.

Men väldigt små förändringar i ekvationen kan leda till stora svårigheter titta tex på ekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = \begin{cases} 1 & \text{om } u(x,y,z,t) > 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Den ekvationen modellerar smältning av is - dvs värmeflöde med en extra parameter som håller ordning på området som är fruset där temperaturen $u(x,y,z,t) = 0$. En så liten skillnad i problemet gör att man måste använda hela matematikens styrka: analys i oändligdimensionella vektorrum, definiera om själva meningen med vad vi menar med en lösning etc.

Om man forskar i partiella differentialekvationer så är man också intresserad av kvalitativa och kvantitativa egenskaper av lösningar. Detta eftersom man har stora problem att explicit beräkna lösningar till partiella differentialekvationer annat än i väldigt enkla fall. Men även om man inte kan beräkna lösningen så kan man ofta säga något om den. T.ex. så förväntar vi oss att om vi har en totalt isolerad kropp med temperatur som är större än noll i tidpunkten $t = 0$ så borde temperaturen vara större än noll för alla $t > 0$. För att bevisa detta så behöver vi inte nödvändigtvis beräkna lösningen explicit.

Partiella differentialekvationer är ett väldigt rikt område som anknyter till många områden inom matematiken. T.ex. så använder teorin for partiella differentialekvationer sig ofta av metoder från Fourieranalys, Funktionalanalys (lite som linjär algebra med oändligt många dimensioner) och komplex analys. Väldigt många områden inom matematiken använder också teori från partiella differentialekvationer, t.ex. differentialgeometri och matematisk fysik.