

Paradoxer

Från boken *Tankens Villkor* av Jan Scheffel, 1999

Sedan Antiken har paradoxer i olika former dykt upp som hot mot de axiomatiska systemen. De har tagits på största allvar av nästan alla verksamma inom filosofin, logiken och matematiken. För många har de utgjort intressanta men ofarliga ordlekar.

Vi kommer att upptäcka att det finns många olika slags paradoxer; en del är rena missuppfattningar, några kan redas ut med lite tankemöda men några enstaka paradoxer står envist kvar som käppar i hjulet på det obegränsade axiomatiska tänkandet. Som vi skall se visar sig dessa emellertid inte ha någon större praktisk betydelse.

Studera följande påstående: "Denna mening innehåller tre fel". Vad har vi här? En mening som talar om sig själv. Med två stavfel. Men var är det tredje felet? Vi kan inte finna något. Alltså är påståendet felaktigt, eller falskt. Då har vi alltså situationen att meningen representerar två stavfel plus att det innehållna påståendet är falskt. Summa tre fel. Men då stämmer ju påståendet. Att påståendet är falskt gör meningen sann. Och att säga att den är sann vore ju självklart falskt.

Vi ser här de vanligaste huvudingredienserna i en paradox; 1) ett påstående som är sant om och endast om det är falskt (motsägelse), 2) en sats som talar om sig själv och 3) vår bedömning att något annat än att påståendet är sant eller falskt inte godkänns.

Ett motargument skulle kunna vara att "Denna mening innehåller tre fel" är ett meningslöst påstående (det är inte välformat, eftersom det innehåller stavfel) och därför inte har något sanningsvärde (sant eller falskt). Dessvärre blir vi inte av med problemet: vi skulle ju kunna eliminera stavfelen och skriva: "Denna mening innehåller ett fel".

Just en förenkling av det senare påståendet, nämligen "Denna sats är falsk", är ett stående exempel i filosofiböcker på en s. k. semantisk paradox. Här förefaller man också kunna tala om meningslöshet; satsen uttalar sig om sitt eget sanningsvärde, men ordet "sats" svarar inte mot något påstående som skulle kunna vara sant eller falskt. Men vi förstår att svårigheten som avses är densamma som i "Denna mening innehåller ett fel".

Går vi tillbaks till antiken talas det om Epimenides från Kreta, som sade att alla kretensare talar osanning. Ett påstående som, om det är sant (d.v.s. att även Epimenides talar osanning), är falskt (eftersom den falsktalande Epimenides sade det). Däremot är detta *ingen genuin paradox*, eftersom det inte följer att påståendet är sant om Epimenides verkligen ljuger. En variant av Epimenides påstående, "jag ljuger", är verkligen en paradox och brukar gå under namnet "lögnarparadoxen". Den är alltså inget annat än paradoxen "denna sats är falsk" i andra kläder.

Låt oss titta på några andra typer av paradoxer. Bertrand Russell uppfann den här. En frisör i en by klipper alla som inte klipper sig själva, men inga andra. Klipper han då sig själv? Om han gör det, så klipper han ju någon som klipper sig själv, vilket ju inte skulle vara fallet. Om han inte klipper sig själv, tillhör han ju just den grupp han skall klippa. Det här är ett exempel på en s.k. logisk paradox.

Zenon av Elea, en elev till Parmenides, redogjorde på 400-talet f. Kr. för tre argument mot begreppet rörelse. Dessa har också kommit att betecknas som paradoxer, eftersom den omedelbara tolkningen av dem ger resultat som strider mot sunt förnuft. En överraskande mängd artiklar och böcker har sedan dess publicerats rörande lösningen av dessa, i min övertygelse, skenbara paradoxer. Den mest berömda "paradoxen" av dessa är den om Akilles och sköldpaddan. Akilles utmanar en sköldpadda i en löptävlan och ger sköldpaddan ett visst försprång. Argumentet är att, då startskottet har gått, Akilles först måste bege sig till den punkt där sköldpaddan befann sig från början. Men när Akilles når dit, har sköldpaddan kommit ytterligare en sträcka. Och när Akilles når denna nya plats, har sköldpaddan åter flyttat sig o.s.v. Akilles kan på så vis *aldrig* komma ifatt sköldpaddan. Å andra sidan vet vi att Akilles naturligtvis springer ifatt och förbi sköldpaddan utan vidare.

Problemet ligger här i betydelsen av ordet "aldrig". Resonemanget är upplagt så, att med "aldrig" kommer att avses den *oändliga sekvens* av allt kortare sträckor Akilles förflyttar sig för att nå dit sköldpaddan var tidigare. Använder vi den vanliga betydelsen av "aldrig" (d.v.s. inte någon gång *i tiden*), uppstår inte problemet. Aristoteles, på 300-talet f.Kr., hade en liknande förklaring. Han menade, att invändningar mot oändlighetsbegreppet, och Zenons paradoxer, beror på att man blandar ihop faktisk oändlighet (oändlighet för given tidpunkt) och potentiell oändlighet (utbredd i tiden).

Vårt "digitala tänkande", att se påståenden som *antingen* sanna eller falska, är djupt rotat. I den berömda paradoxen "*Den Öväntade Examinationen*" meddelar läraren klassen att hon någon gång under den kommande veckan kommer att dela ut ett skriftligt prov. Hon vill inte uppge vilken dag provet skall ges, eftersom det skall komma som en överraskning. Eleverna resonerar emellertid som så att fredagen är utesluten; det är den sista dagen i veckan och provet skulle då inte komma överraskande. Möjliga dagar är då måndag till och med torsdag. Givetvis är torsdagen utesluten; det är den sista av de möjliga dagarna och provet skulle då inte heller komma överraskande. På samma sätt kan eleverna dra slutsatsen att även de andra dagarna i veckan är otänkbara. Provet kan alltså inte ges överraskande.

Om vi accepterar elevernas resonemang, måste vi dra slutsatsen att läraren inte kan ge ett överraskande prov. Detta är paradoxalt, eftersom intuitivt sett borde inget hindra läraren att ge de överraskade eleverna provet exempelvis på onsdagen. Vi tenderar att tänka att antingen har läraren *eller* eleverna rätt, men inte både läraren och eleverna. Fundera nu gärna en stund över hur paradoxen kan attackeras! Jag visar en lösning i Appendix.

"Den oväntade examinationen" är i min mening en av de mest fascinerande paradoxerna. I förstone är det mycket svårt att se någon angreppspunkt. Men till slut kan vi konstatera att paradoxen var skenbar. Detta visar sig åter bero på att paradoxen saknade den nödvändiga ingrediensen självreferens.

I dagligt tal används ordet "paradox" för att beteckna motsägelse. Motsägelsen kan vara riktad endast åt ena hållet, som Epimenides påstående att alla kretensare är lögnare, eller som i påståendet "jag ljugar" riktad åt båda hållen. Endast de senare satserna kan emellertid vara *genuina* paradoxer, eller antinomier, enligt definitionen ovan.

Matematiker har alltid varit på sin vakt gentemot paradoxer. De får helt enkelt inte förekomma inom matematiken. Exempelvis är all division med talet 0 bannlyst. Som vi kan se i kapitel 6 ger division med 0, om den accepteras, upphov till motsägelser. Lyckligtvis har man genom att introducera några få "skyddsregler" lyckats täppa till hålen i det matematiska skeppet. Vi känner nu inte till några som helst motsägelser i "vardagsmatematiken", definierad som talteori, algebran, aritmetiken, geometrin och analysen. Priset vi betalar för att

helt eliminera motsägelser visades av Kurt Gödel (se kapitel 5): somliga korrekta satser kan inte bevisas vara sanna!

Varför är vi då så rädda för motsägelser? Inom logiken och matematiken är svaret mycket bestämt: då skulle *vilket påstående som helst* kunna visas vara sant! Vi ger ett bevis för detta i Appendix. En enda logisk motsägelse skulle alltså ställa till en oerhörd oreda; vi skulle inte kunna skilja teorem från icke-teorem, inte sant från falskt. Vem som helst skulle då kunna övertyga en domstol om att vi är skyldiga denne en tusenlapp!

Vi kommer nu se att semantiska paradoxer (som Lögnaren) inte är lika hotfulla som de logiska paradoxerna. De står som isolerade problem, som monument påminnande oss om svårigheten att definera vad som menas med empirisk sanning.

Inte bara inom matematiken utan också i vardagslivet skulle paradoxer kunna få svåra konsekvenser. Korrekt handlande gentemot familjen, vännerna och samhället i övrigt bygger på goda argument och sund logik. Till vardags pratar vi ibland om "Moment 22" - situationer efter Joseph Hellers bok med samma namn. Dessa är som regel enkla motsägelser, inte paradoxer. Min gode vän förklarade att de gärna ville skaffa ett torpställe, men för att det skulle vara möjligt måste de först skaffa bil. Dessvärre, sade han, skulle de då inte längre ha råd med torpet.

Allvarliga och Harmlösa

Vissa "paradoxer" är verkligen skenbara. Men somliga kräver noggrann analys och några kommer för evigt att bestå. Det viktiga blir att identifiera de paradoxer som kan ha allvarliga konsekvenser för formella system och vårt tänkande. Vi skall nu studera de olika typerna av möjliga paradoxer och försöka skilja vetet från agnarna.

Paradoxerna (äkta eller inte) kan delas in i följande grupper:

- 1) *Logiska* (de avser syntaxen i formella system, exempelvis mängdläran)
- 2) *Semantiska* (beror på faktiska förhållanden genom sanningsbegreppet)
- 3) *Zenons paradoxer* (orsakas av indelning av tid och rum i oändligt små intervall)

- 4) *Sorites*-paradoxer (upprepad användning av vaga begrepp ger motsägelse)
- 5) *Spel- och beslutsparadoxer* (rationella beslut ger irrationella resultat)
- 6) *Pragmatiska paradoxer* (motsättning mellan själva hävdandet av något och det som sägs)
- 7) *Moment 22*-paradoxer
- 8) Paradoxer *inom vetenskaperna* (naturlagar förefaller strida mot varandra eller sunt förnuft).
- 9) *Övriga*

Paradoxer i grupp 1 är de allvarligaste. Hit hör Cantors och Russells paradoxer. Eftersom formella system inte identifierar enskilda faktiska sammanhang, utan tillämpas i resonemang om vad som helst, måste de vara vattentäta. I Appendix visas att alla satser är logiskt sanna om en motsägelse kan uppstå någonstans inom ett formellt system. Detta medför naturligtvis att systemet kollapsar. Lyckligtvis kan vi oskadliggöra de logiska paradoxer som hittills har sett dagens ljus. Kurt Gödel visade att vi kan välja bort antinomier till priset av att inte kunna avgöra om alla satser vi formulerar är teorem eller inte.

Logiska

Cantors teorem, på vilket hans paradox bygger, säger att ingen mängd har lika många element som den har delmängder. (Delmängder är mängder som kan bildas av element i en given mängd; en delmängd av mängden $\{1,2,4\}$ är t. ex. $\{1,2\}$). Mängden av heltal är alltså mindre än mängden av olika mängder (delmängder) av dessa heltal. Detta visas lätt m.h.a. den så kallade diagonaliseringsmetod han utarbetade. Låt oss nu betrakta den mängd som innehåller alla mängder. Enligt Cantors teorem måste denna mängd vara mindre än mängden av dess delmängder. Men, definitionsmässigt, kan ju mängden av alla mängder inte vara mindre än någon annan mängd. En logisk paradox har uppstått.

Cantor fann själv en väg ut ur dilemmat. Han utgår ifrån faktumet att vissa saker eller begrepp inte själva är mängder. De primärt bildade mängderna har just sådana medlemmar eller element; det är *meningslöst* att bilda en mängd av primära mängder om de

primära mängdernas element själva är mängder. När vi nu definierat primära mängder kan vi bilda nya mängder, vars element kan hämtas från bägge klasserna (d.v.s. företeelser som inte själva är mängder, samt mängder av dessa). Därefter kan vi bilda nya mängder på samma sätt. Vi kan fortsätta utan ände. Men aldrig kan vi bilda en mängd som innehåller alla andra mängder. Det är lika omöjligt som att ange det största positiva heltalet. Omöjligheten ligger naturligtvis i att mängden av alla mängder (eller det största positiva heltalet) *inte existerar*; varje definierad mängd kan tillhöra en ny mängd o.s.v. Paradoxen försvinner därigenom. Eftersom mängden av alla mängder inte existerar, kan vi inte prata om den. Då faller en av paradoxens premisser och därmed paradoxen.

Det har argumenterats att Cantors resonemang är ad hoc. Varför skulle vi behöva begränsa oss till att bilda mängder *efter* dess att vi definierat dess medlemmar? Min egen kommentar till detta är att om vi till äventyrs definierar mängder innehållande ospecifierade mängder, kan vi ändå alltid bilda nya mängder enligt ovan beskriva Cantor-algoritm, varigenom just "mängden av alla mängder" kan visas sakna existens. Men som sagt; jag anser det meningslöst att bilda mängder av odefinierade element.

Nu övergår vi till Russells paradox. Betrakta mängden av alla mängder som inte innehåller sig själva som element. Vi reducerar alltså mängden i Cantors paradox något. Kalla mängden R . Exempelvis tillhör mängden av alla frisörer i Lund R ; mängden av frisörer innehåller frisörer, inte mängder. Russell frågar nu: tillhör även R mängden R , d.v.s. sig själv? Om svaret är ja, så innehåller R nu en mängd som har sig själv till element. Detta är, enligt definitionen, inte tillåtet. Svaret måste alltså bli nej. Men då blir fallet att mängden definitionsmässigt skall ingå i R . Svaret blir alltså varken ja eller nej. Russells paradox strider alltså mot lagen om det uteslutna tredje, snarare än att vara en direkt motsägelse. Men resultatet blir detsamma, man kan visa att motsägelser uppstår då en sats strider mot lagen om det uteslutna tredje.

Åter ligger problemet i huruvida en mängd överhuvudtaget kan innehålla sig själv. Enligt Cantors algoritm bildas ju aldrig mängder på ett sätt som gör att de själva ingår. En mängd på n :e nivån bildas ju alltid m.h.a. element från nivå $n-1$. Vi kan alltså tolka detta som att absolut självreferens, som så ofta leder till problem, är utesluten vad gäller mängder. På så sätt upplöses Russells paradox. Eftersom *ingen*

mängd innehåller sig själv som element, betecknar R mängden av alla mängder. Denna existerar ju inte, enligt vår lösning av Cantors paradox och kan därför inte talas om. Russells fråga saknar därför mening och paradoxen är skenbar.

Russell resonerade själv enligt liknande linjer som Cantor i sin typteori. Han låter nivån av typ 1 bestå av individer som inte själva är mängder, nivån av typ 2 (den lägsta mängdnivån) omfattar mängder av individer o.s.v. Han säger dessutom att de logiska fel som vidlåter mängdteoretiska paradoxer uppstår när man menar att en mängd kan innehålla element, vars definition redan förutsätter mängden i fråga. Han formulerade sin onda-cirkel-princip: något som innehåller alla av en samling ting kan inte självt vara en medlem av samlingen.

För att popularisera Russells paradox tas ofta en annan (av Russell uppfunnen) paradox upp; den s.k. barberarparadoxen. Låt nu mängden R begränsas till att omfatta alla personer i Paradoxköping som inte klipper sig själva. Vi antar att alla dessa, och endast dessa, personer klippas av en och samma frisör i Paradoxköping. Frågan gäller nu huruvida frisören själv tillhör mängden R . I fallet att han ämnar klippa sig själv tillhör han inte R . Detta alternativ är emellertid inte tillgängligt, eftersom han som frisör bara klipper de som inte klipper sig själva. I fallet att han inte klipper sig själv tillhör han definitionsmässigt R . Men enligt förutsättningarna skall han då klippas av ortens frisör, d.v.s. av sig själv. Vi får i bägge fallen att om frisören tillhör R så gör han det inte. Paradox alltså!

Barberarparadoxen är *inte* en omskrivning av Russells paradox. Visserligen talar vi om en mängd som innehåller sig själv som element, men mängden i fråga är ändlig. I en populär upplösning av paradoxen argumenteras att det helt enkelt inte finns någon sådan frisör. Vi har, precis som i paradoxen om Stenen (se nedan), försökt skapa något omöjligt. Som jag ser det upplöses barberarparadoxen även av följande anledning.

Mängden R 's storlek beror på huruvida frisören ingår i R eller ej. Detta gäller naturligtvis även de andra medlemmarna av R , men frisören är speciell i det att han *dynamiskt* definierar R . Vi skulle, logiskt ekvivalent, kunna säga om honom att han är medlem i R om och endast om han inte är det. Om frisören införlivas i R *medför han instruktionen* att vi skall undersöka huruvida han är det, av den orsaken att vi i det fallet måste utesluta honom från R . Tillhör han inte R , säger instruktionen att han skall adderas till R . Frisören innehåller alltså själv,

som element, instruktioner om hur R skall bildas och innehåller därmed *implicit* R självt. Detta är inte tillåtet om vi utgår ifrån Cantors och Russells hierarkiska mängdstruktur. Vi kan aldrig konsistent bilda mängder som innehåller sig själva som element. Barberarparadoxen ställer alltså en fråga som saknar mening på så sätt att svaret inte kan utgöras av ett ja eller nej, uttryckas i sant eller falskt. Vi ser att lösandet av de mängdteoretiska paradoxerna innebär en viss tolkning av lagen om det uteslutna tredje.

Semantiska

Mycket filosofiskt tänkande har ägnats åt semantiska paradoxer av typen Lögnaren. Här biter inte Cantors och Russells medicin. Att generalisera typteorin från logiken (mängdläran) till semantiken leder, som Douglas Hofstadter påpekar, till en del svårsmälta absurditeter. Meningen "jag kritiserar i denna bok typteorins utvidgande till semantiken" skulle exempelvis *inte* vara tillåten i systemet. Jag skulle nämligen då bedöma satsen av viss typ utifrån en nivå av samma typ.

Vi skall ägna de semantiska paradoxerna en del utrymme även här. Påståendet "denna mening innehåller ett fel" som vi diskuterade ovan kan faktiskt ses som en semantisk paradox. Vi tenderar att se denna sats som mer meningsfull än påståendet "denna sats är falsk". Men vi skulle mycket väl kunna byta ut ordet "mening" mot "sats" och "ett fel" mot "endera ett stavfel, ett logiskt fel, osanning eller fel av annat slag". Om vi bortser från subjektiva värderingar, kan vi konstatera att alla möjligheter utom "osanning" kan sorteras ut. Återstår alltså påståendet "denna sats är falsk". "Denna mening innehåller ett fel" är alltså en kamouflerad version av detta påstående. Vi kanske ser uttrycket som mer meningsfullt, men det är det inte.

Just denna invändning, att Lögnaren inte är ett meningsfullt påstående, är viktig. Vi förstår dessutom att Lögnaren inte förekommer i resonemang om annat än paradoxer. För även om Lögnaren tolkades som en meningsfull paradox, skulle vi egentligen inte stå inför något större problem. Området med svag is ligger utanför våra färdvägar. De logiska paradoxerna, däremot, blir fatala om vi måste erkänna deras relevans. Som om vi i ett slag insåg att hela vårt hus var murknat av husbock. Kanske anser vi att Cantors och Russells paradoxer är mycket speciella och ofarliga på samma sätt som

Lögnaren. Men då skall vi observera att mängdteorin, där problemen uppstår, är ett formellt system uppbyggt enbart av slutledningsreglerna för "icke, och, eller, om, om och endast om, alla, någon, ingen, identitet och är medlem av". De logiska paradoxerna, liksom samtliga satser inom matematiken, kan reduceras till samband *endast* inbegripande dessa logiska relationer. Skulle motsägelser råda inom mängdläran kan vi alltså inte överhuvud taget lita till verktygen för formella resonemang.

Saul Kripke formulerade följande semantiska paradox. Jones påstår: (1) De flesta av Nixons påståenden om Watergate är osanna. Detta är det enda han säger om Watergate. Låt oss nu säga att vi vet att av Nixons hittills fällda påståenden om Watergate är precis lika många falska som sanna. Nu säger Nixon: (2) Allt Jones säger om Watergate är sant. Om Nixons påstående (2) är korrekt är det ändå falskt enligt (1) och om Nixons påstående är falskt, så är det sant enligt (1). I denna formulering av Lögnaren förefaller det som om paradoxen faktiskt har satts in i ett *meningsfullt* sammanhang. Skenet bedrar emellertid: Nixons påstående (2) skulle kunna ha formulerats "Det Jones säger om Watergate, d.v.s. att de flesta av mina påståenden om Watergate är osanna, är sant." Eller, ytterligare förenklat: "Det är sant att de flesta påståenden jag faller om Watergate är osanna", eller "Jag ljugar om Watergate". Detta senare påstående följer alltså av att Nixon tidigare uttalat lika många sanna som falska påståenden. Vi är tillbaka till Lögnaren, som ju inte ens är en äkta paradox.

Eller är detta, som Kripke argumenterar, ett bevis för att våra vardagliga påståenden om sant och falskt är sårbara för paradoxer om de empiriska förhållandena är extremt ogynnsamma? Påståendena (1) och (2) skulle ju exempelvis kunna ha dykt upp under Watergateförhören. Och de leder till lögnarparadoxen.

Mitt svar är nej, av följande skäl. De av Nixons påståenden som är meningsfulla står som regel utanför den här problematiken; de är antingen sanna eller falska. De sanna påståendena innehåller dessutom information. Det enda vanskliga påståendet är det han faller om Jones. Men som vi såg ovan är det påståndet ekvivalent med Lögnaren. Det enda vanskliga påståndet talar alltså om sig själv, saknar information och är därför ointressant i sammanhanget.

Det är som om (en mer suspekt) Hercule Poirot skulle säga: "allt som påstås av de misstänkta i det här rummet är falskt". Så länge han själv inte räknas till de misstänkta är uttalandet oproblemiskt;

antingen har han rätt eller så har han fel. Men om han själv räknas in bland de misstänkta, uppstår Lögnaren i ny gestalt. Konsekvensen blir i det senare fallet, att hans påstående är meningsfullt och informativt om de andra personerna i rummet, medan det blir meningslöst för *ett specifikt yttrande* han fällt, nämligen detta sista. Hans påstående är också meningsfullt och informativt för alla hans *tidigare* påståenden i rummet. Hur kan det vara så? Gäller inte hans sista yttrande samtliga tidigare påståenden? Låt säga att Poirot tidigare hävdade att han satt på Londontåget klockan 17.14, den tidpunkt då mordet begicks. Uppenbarligen finns inget paradoxalt förhållande mellan det påståendet och hans sistnämnda. Däremot är påståendet "allt som jag påstår i det här rummet falskt" paradoxalt endast då han med "allt" syftar på just detta påstående. Ingen information går härmed förlorad; då han syftar till de (informativa) påståenden han fällt tidigare under kvällen uppstår ingen paradox. Vi ser här att även om vi bedömer Lögnaren som problematisk *och* meningsfull, kan vi i formella resonemang *bortse ifrån den eftersom den inte innehåller information.*

Lögnaren bygger alltså på självreferens och talar därigenom endast om sig själv, inte om något utanförhållande sakförhållande. Men Sainsbury argumenterar för att Lögnaren *är* meningsfull. Han försöker formulera paradoxen utan självreferens. Han ger exemplet med lappen, på vars ena sida står skrivet "Det som står på andra sidan av detta papper är sant" och där det på andra sidan står "Det som står på andra sidan av detta papper är falskt". Detta är däremot inget annat än en formulering liknande Kripkes, eller vad Hofstadter skulle ha kallat "en två-vägs loop". Vi kommer inte ifrån att självreferens *är* essensen i en paradox. Och, som Hofstadter resonerar i sina böcker, självreferens är ett ofrånkomligt, utomordentligt viktigt och nödvändigt begrepp, som till vardags uppkommer så fort vi talar om oss själva eller kommenterar något vi själva sagt eller skrivet.

Kripkes vidare analys av Lögnaren är intressant i den aspekten att han offerar lagen om det uteslutna tredje. Hans insikt om att det naturliga språket inte innehåller en hierarki av metaspråk, vilka (som hos Tarski) endast kan tala om sanningen av satser tillhörande underliggande nivåer, ledde honom till denna möjlighet. Genom att införa ett "sanningsvärdesgap" (ett tredje alternativ, kompletterande sanningsvärdena "sant" och "falskt") lyckades han formulera en teori för hur sanningsvärdet av alla satser i ett språk kan formuleras i språket självt. Som visas i Appendix innebär en motsägelse samtidigt ett brott

mot lagen om det uteslutna tredje. Tarski hade tidigare visat att ett bivalent (med sanningsvärdena "sant" och "falskt") och semantiskt slutet språk (som innehåller alla påståenden om sanningsvärdet av satser i språket) måste vara inkonsistent. Alternativt formulerat visade Tarski att semantiskt slutna språk (med en syntax minst lika rik som aritmetiken) måste innehålla semantiska antinomier. Detta teorem är närbesläktat med Gödels ofullständighetsteorem.

Vi kan faktiskt bilda välformade och meningsfulla påståenden, vilka vi varken anser vara sanna eller falska. Tag satsen "Olle har slutat röka". Om Olle aldrig har rökt, är påståendet självklart inte sant; man kan inte sluta med något man aldrig har påbörjat. Är påståendet falskt? Nej, i så fall skulle vi få intrycket att Olle fortfarande röker. Analogt argumenterar somliga, att satser som "denna sats är falsk" varken är sann eller falsk. Kripke var den förste, som systematiskt drog konsekvenserna av den här utgångspunkten. Han visar att det är möjligt att ha avancerade teorier om verkligheten, där de flesta självrefererande satserna accepteras. De självrefererande satser som emellertid leder till paradoxer, erhåller helt enkelt inget sanningsvärde.

Dessförinnan var Tarskis klassiska arbete dominerande. Han utgår ifrån den mest vedertagna definitionen av (semantisk) sanning; korrespondensteorin. Låt " p " vara en godtycklig sats och " x " ett namn eller beskrivning på satsen. Då gäller (T): x är sann om och endast om p är fallet (sakförhållandet). Notera skillnaden mot logisk sanning; *semantisk sanning* är en egenskap, som satser ha i kraft av en motsvarighet mellan det språkliga uttrycket och den utomspråkliga verkligheten. Logisk sanning är däremot tautolog, d.v.s. oberoende av verkligheten.

En fråga som nu uppkommer: är definitionen av sanning (T) adekvat för allt språkbruk? Låt oss med " x " nu mena satsen "denna sats är falsk". Vi får då (T): "Denna sats är falsk" är sann om och endast om *denna sats* är falsk. De kursiverade orden i (T) syftar på uttrycket "Denna sats är falsk", varför vi kan skriva om (T): "Denna sats är falsk" är sann om och endast om "Denna sats är falsk" är falsk. Här har vi nu en självmotsägelse, som inte kan vara sann. Definitionen (T) av sanning kan alltså inte användas universellt utan vidare. Tarskis väg ut ur dilemmat har diskuterats mycket. Han visar att *semantiskt slutna språk*, d.v.s. sådana som innehåller både satser och satser om sanningsvärden alltid är *motsägelsefulla*. Utvägen är att öppna upp språket så att sanningsvärdet hos satser i objektspråket bedöms i ett högre språk,

metaspråket. Satser om sanningsvärden i metaspråket formuleras i meta-meta-språket o.s.v. Genom att skilja på språknivåer uppstår aldrig motsägelser inom den enskilda språknivån.

Tarskis lösning är formellt elegant, men är främmande i vanligt språkbruk. Vi har inte för vana att hålla ordning på i vilket meta-språk vi för tillfället befinner oss i. Vidare är sanningsdefinitionen (T) öppen för viss kritik. Det är inte heller klart huruvida "sats" skall avse det språkliga uttrycket (som hos Tarski) eller den mening som avses. Dessutom utarbetade Tarski inte sin teori för fallen då oändligt många metaspråk behövs. Kripkes analys av bristerna i Tarskis system är mycket fruktbara.

Lögnaren har analyserats och "lösts" på flera originella sätt av ett stort antal logiker och filosofer, vilka vi inte kan ge rättvisa här. Paradoxen har givit upphov till en rik utbyggnad av semantiken och andra delar av filosofin. Den har bland annat lärt oss att äkta paradoxer uppstår ur vissa självrefererande satser. Dessa har egenskapen att endast tala om sig själva, inte om sakhållanden i världen utanför språket. Filosofer använder termen "ungrounded" för dessa satser, de "jordas" inte i något faktum utanför språket i sig.

Ett modernt försök att upplösa Lögnarparadoxen har utförts av Barwise och Etchemendy m.h.a. den s.k. situationsteorin. Här argumenteras att Lögnarens uttalande sker i ett sammanhang, men att uttalandets sanningshalt måste värderas i ett annat. Detta är i min mening ett mycket konstlat angreppssätt, som varken övertygar, eller har motsvarighet i vårt naturliga språkbruk.

Floran av semantiska paradoxer är fascinerande. Gå nu gärna till Appendix, där jag behandlar Grellings och Goodmans paradoxer samt den s.k. korp-paradoxen efter att först ha diskuterat den ädla konsten att just analysera paradoxer.

Sammanfattningsvis behöver vi inte bekymra oss för de semantiska paradoxerna. De utgör fascinerande konstruktioner, men deras satsinnehåll är mycket begränsat. De talar om sig själva, om möjliga defekter i syntaxen hos naturliga och formella språk, men de talar inte om den utanförliggande världen. De underminerar därför inte vår användning av det semantiska sanningsbegreppet; att bedöma påståenden om världen utanför språket.

Zenons

En av Zenons paradoxer är Pilen. Här "visas" att rörelse är omöjlig. Betrakta en pil, som flyger genom luften. I varje ögonblick står pilen stilla, eftersom all rörelse kräver tid. Eftersom tiden är sammansatt av ögonblick, befinner sig pilen stilla i tiden och rör sig alltså inte. Intuitivt är slutsatsen felaktig och det är lätt att visa detta. Men vi kan här passa på att tillgodogöra oss en metod att avgöra "paradoxaliteten" i en paradox, i väntan på hårdare nötter att knäcka. En skenbar paradox lider av minst ett av följande fel: a) felaktiga premisser, b) felaktig slutledning eller c) meningslös satskonstruktion.

Pilen kan formuleras så här: 1) I varje ögonblick står pilen stilla. 2) En tidsrymd består av ögonblick. Slutsats: Under varje tidsrymd står pilen stilla. Om vi nu undersöker premisserna först, ser vi inget problem med dem. Påståendena har definitivt mening. Återstår alltså möjligheten att slutledningen är felaktig. Felaktiga slutledningar är sådana som ger slutsatser vars informations-innehåll inte finns i premisserna (eller som inte kan antas vara underförstått). Slutsatsen innehåller här påståendet att i varje ögonblick befinner sig pilen i sitt *viloläge*. Premisserna innehåller inte denna information. Premiss 1 tolkar vi snarare som att pilen visserligen står stilla i varje ögonblick, men att respektive sådan position mycket väl kan skilja sig från den tidigare. Vi sa det inte i premiss 1, men underförstod det. Paradoxen innebär alltså helt enkelt en misstolkning av premiss 1. Den begränsar informationen i premiss 1 på ett otillåtet sätt.

Sorites

Att upprepad användning av vaga begrepp kan ställa till oreda i vardagen känner vi igen. En historia som passerat via många personer är sällan sig lik.

Ibland kan t.o.m. paradoxer uppstå. Den mest kända av dessa soritesparadoxer (efter latinets sorites; slutledningskedja) är antagligen *Stenhögen*. Eftersom en enda sten inte kan göra en hög, kan inte heller en stenhög bildas av att sten lägges på sten.

Redan Aristoteles hade upptäckt soritesparadoxer då han arbetade med att systematisera den del av logiken som rör syllogismerna (argument med två premisser och en slutsats). Här talas

det om "fyrtermsslut" eftersom en slutsats med innehåll som inte ingår i premisserna dras. Jag ger ett modernt exempel på syftningsglidningen. Från premisserna "Alla metaller är grundämnen" och "Mässing är en metall" dras slutsatsen "Mässing är ett grundämne"!

Soritesparadoxerna är mer nyttiga än farliga; genom att förstå dem når vi kunskap om hur vi använder språket.

Spel- och Besluts

Newcombs paradox förefaller ge samma vikt åt två ömsesidigt uteslutande rationella val. Antag att en demon, som alltid tidigare har kunnat förutspå dina handlingar har förberett två askar. Du kan välja att öppna både ask *A* och *B* eller enbart ask *B*. I ask *A* ligger garanterat 1000 kr, medan ask *B* innehåller 1 000 000 kr om demonen förutspått att du enbart öppnar den. Paradoxen ligger i att det borde vara klokt att öppna bägge askarna (demonen har ju redan handlat) men också klokt att bara öppna ask *B* (gör du det, har demonen med stor säkerhet förutspått det och därför lagt 1 000 000 kr däri). Här är det emellertid mest en fråga om tillit: har demonen alltid rätt i sina förutsägelser finns bara en sak att göra.

På liknande sätt kan andra beslutsparadoxer lösas; de är som regel inte självrefererande.

Pragmatiska

En mer vardaglig typ av paradoxer är de *pragmatiska paradoxerna*. Här råder en praktisk motsättning mellan själva hävdandet av något och det som sägs. Om jag påstår att jag inte existerar, eliminerar jag möjligheten för att överhuvud uttala påståendet. Säger jag att jag inte gillar fisk, men beställer det vid varje restaurangbesök, uppstår en pragmatisk paradox. Beroende på hur gränsen för motsägelsen dras, utnyttjas de pragmatiska paradoxerna ibland vid kritik av skeptisk filosofi.

Den observante torde inte ha alltför mycket problem med pragmatiska paradoxer.

Moment 22

"Det fanns bara en hake och det var moment tjugotvå som fastslog att oro för egen trygghet inför faror som var verkliga och överhängande var en förnuftig tankeprocess. Orr var tokig och kunde avföras ur tjänst. Det enda han behövde göra var att anhålla om det; och så snart han gjorde det, så skulle han inte längre vara tokig om han utförde fler bombflygningar och normal om han inte gjorde det, men om han var normal måste han utföra dem. Yossarian blev djupt gripen av den absoluta enkelheten i moment tjugotvå och lät höra en aktningsfull vissling."

Passagen ur Joseph Hellers *Moment 22* innehåller en paradox som många av oss som läst boken sett dyka upp igen senare i olika sammanhang. Här kan flygaren befrias från bombflygningar om han är tokig och anhåller om att avföras. Men *Moment 22* innebär att man inte är tillräckligt tokig om man har förstånd nog att ansöka om befrielse från bombningar. Om man begär att avföras får man avslag och om man inte gör det är man berättigad till att avföras.

Moment 22-paradoxen har viss likhet med Russells barberarparadox och Stenen; den beskriver en person (befriad från bombningar) som inte kan finnas. Man kan inte begära av en person att samtidigt vara tokig och inte vara det. Paradoxen kan ju faktiskt formuleras så här kort och enkelt: om du söker befrielse (vilket du måste för att bli befriad) får du det inte.

Naturtolkningens

Inom naturvetenskaperna diskuteras ibland *fysikaliska paradoxer*. Man avser då något annat än de paradoxer som diskuteras inom filosofin. En fysikalisk paradox innebär att ett fenomen (eller ur naturlagar härlett samband) strider mot en etablerad lag. Om en i övrigt trovärdig teori exempelvis skulle generera resultatet att materia kan färdas med hastighet större än ljusets, uppstår en paradox eftersom en annan etablerad teori (relativitetsteorin) förbjuder detta. Likheten till filosofiska paradoxer är ändå tydlig, eftersom två företeelser strider mot varandra (både A och inte A).

När två fysikaliska lagar strider mot varandra, rasar inte fysiken ihop som vetenskap. Utgången är i stället att den ena lagen väljs som "sann", medan den andra ratas eller används som approximation. Så blev fallet när Newtons rörelselagar måste reformeras utifrån relativitetsteorin. Paradoxer i fysiken, eller i Naturen om man så vill, existerar inte. Naturen är vad vi konstaterar den vara, och motsäger därför definitionsmässigt inte sig själv. Regularitetsprincipen ser till att de samband vi ställer upp som naturlagar bevaras. De största problemen i vår tolkning av Naturen uppstår när vi inte förmår se kausalsamband, som för kvantfysikaliska fenomen. Vi brukar räddar detta med en statistisk beskrivning.

Som vi senare skall se, kan hela matematiken uttryckas fysikaliskt. Varje matematiskt *bevis* kan alltså avbildas på en fysikalisk *process*. På samma sätt kan också Gödel-oavgörbara konfigurationer uppstå även i Naturen. Detta visar att *fysikens formalism är ofullständig*. Det är priset vi måste betala för att hålla fysiken fri från motsägelser. *Det finns därmed ingen möjlighet att någonsin kunna formulera en modell som förutsäger eller beskriver allt i Naturen!*

Ger detta utrymme för troll och spöken? Knappast; jag kan inte tänka mig dessa i någon gestaltning som inte strider mot kända naturlagar. Överhuvud taget har jag svårt att se att det "mystiska" skulle passa in precis i denna ändå ganska magra gråzon av Naturen.

Andra

Jag tar här upp några olika paradoxer, som inte passar in i de tidigare kategorierna. Har jag utelämnat en bra paradox ber jag om ursäkt; det finns många goda och tankestimulerande paradoxer i litteraturen.

Paradoxen om *Stenen*: Om Gud är allsmäktig, skulle han då inte kunna skapa en sten så stor att han inte förmår lyfta den? Paradoxen upplöses om man betänker att det här krävs att en allsmäktig individ skall bryta mot en av logikens lagar; motsatslagen (både lyfta stenen och inte göra det). Paradoxen har för övrigt använts som *motbevis* för Guds existens; den förefaller ju visa att en varelse inte kan vara allsmäktig. Därmed skulle Gud i traditionell mening inte kunna finnas.

En annan paradox rör *Förföraren*. Han ställer följande två frågor till föremålet för sin ömma låga: 1) Kommer Du att besvara den här frågan på samma sätt som nästa? 2) Vill Du älska med mig? Håller hon

sitt ord, måste hon svara ja på den andra frågan oberoende av vad hon svarade på den första! Paradoxen upplöses relativt enkelt: svarar kvinnan nej på den första frågan innebär det snarast att hon inte vill förpliktiga sig till något. Alltså ger hon utrymme för möjligheten att svara vad som helst på den andra frågan, utan något beroende till den första frågan.

Samma typ av paradox ser vi hos *Den Tillfrågade* (uppfunnen av en god vän): Tänker Du svara nej nu? Vare sig vi svarar ja eller nej, blir vårt uttalande felaktigt. Vi ser att paradoxen dessutom tillhör den grupp av meningslösa satser som även Lögnaren tillhör. Vilken *meningsfull* fråga skulle jag svara nej på? En (skenbar) paradox uppstår genom att semantiken extremiseras till en innehållslös sats.

Många har funderat hur det egentligen är med *Kylskåpslampan*; slocknar den egentligen då jag stänger dörren? Den experimentella situationen är svår: hur liten dörrspringan än görs lyser lampan. Men då den skall slockna har gummilisten just tagit vid. Här ligger paradoxen i själva observationen: vi måste utföra undersökningen för att få veta svaret, men samma undersökning omöjliggör just att vi får veta sanningen. För att söka svaret måste vi både utföra experimentet och icke.

Litteraturen om paradoxer är enormt innehållsrik. Förutom de referenser jag ger, rekommenderar jag den intresserade att söka bland de många kloka och intressanta bidragen på internet.